

## 5. Aerodynamik im gaskinetischen Übergangsbereich

Wie bereits im Kapitel 2 dargelegt unterteilen wir die gaskinetischen Strömungsbereiche mit Hilfe der Knudsenzahl wie folgt:

Freie Molekülströmung,  $Kn_L = \lambda / L > 10$

Gestörte Molekülströmung :  $1 < Kn_L < 10$

Übergang  $0,1 < Kn_L < 1$

Gleitströmung  $0,1 > Kn_L$  und  $Kn_\delta \approx Ma / \sqrt{Re_L} > 0,1$

Die charakteristische Kennzahl für die Geschwindigkeit ist die molekulare Machzahl (Speed ratio)  $S = V / c'$

Die Moleküle bewegen sich zum Körper mit der Massengeschwindigkeit  $V$  und einer überlagerten, in allen Raumrichtungen gleich verteilten, thermischen Geschwindigkeit  $c$ . Der wahrscheinlichste Wert der thermischen Geschwindigkeit beträgt  $c' = \sqrt{2RT}$ .  $c'$  die wahrscheinlichste thermische Geschwindigkeit der Luftmoleküle.

Mit  $c' = \sqrt{2RT}$  und  $a = \sqrt{\kappa RT}$  ergibt sich  $S = \sqrt{\kappa / 2} Ma$

In Analogie zum Machwinkel der Kontinuumsströmung können wir für den molekularen Bereich mit Hilfe von  $V$  und  $c'$  einen molekularen Machwinkel  $\mu$  definieren.

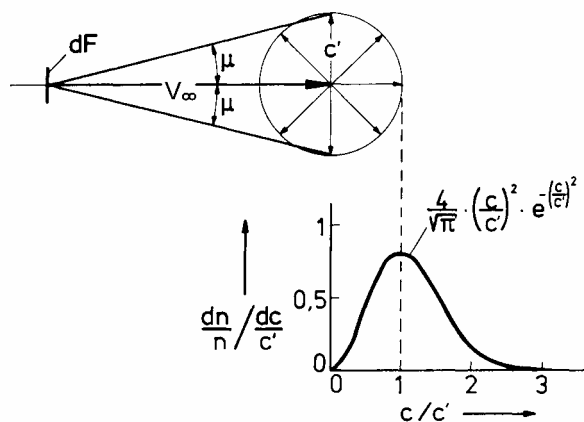
Dieser in Bild 5.1 definierte Winkel gibt relativ zur Massengeschwindigkeit den Richtungsbereich an, in dem sich die Moleküle bevorzugt bewegen.

a. Molekularer Machwinkel  $\mu$  :

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{c'_\infty}{V_\infty} = \frac{1}{S_\infty};$$

$c'$  = wahrscheinlichste thermische Geschwindigkeit

$$c' = \sqrt{2R \cdot T}$$



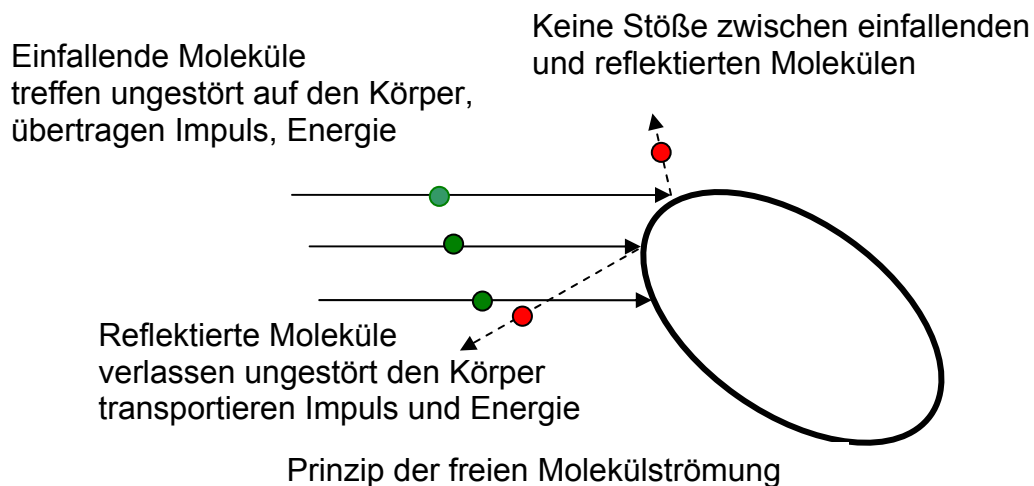
b. Verteilung der thermischen Geschwindigkeit  
(Geschwindigkeitsbetrag, richtungsunabhängig)

**Bild 5- 1 Definition des Molekularen Machwinkels**

## 5.1 Die freie Molekülströmung

Bei der freien Molekülströmung treffen die Moleküle der Anströmung ungestört durch die reflektierten Moleküle auf den Körper.

Die Moleküle üben auf den Körper eine Wirkung beim Auftreffen und eine Rückwirkung beim Verlassen aus. Das folgende Bild 1 erläutert dies für den Fall  $S = \infty$ .



**Bild 5- 2 Prinzip der freien Molekülströmung**

Beim Stoß und bei der Reflektion übertragen die einfallenden und reflektierten Moleküle Normalimpuls, Tangentialimpuls und Energie. Die lokale Gesamtwirkung setzt sich demnach aus einem Beitrag der einfallenden ( $i$  incident) und der reflektierten ( $r$ ) Moleküle zusammen.

$$\text{Teilchenfluss} \quad n_i + n_r = 0 \quad (\text{Kontinuität}) \quad (5,1)$$

$$\text{Druckwirkung} \quad p = p_i + p_r \quad (5,2)$$

$$\text{Wandschubspannung} \quad \tau = \tau_i - \tau_r \quad (5,3)$$

$$\text{Energiefluss} \quad e = e_i - e_r \quad (5,4)$$

Bild 5.3 Vergleicht für eine Anströmmachzahl  $Ma \gg 1$  die freimolekulare Strömung um einen stumpfen Körper mit der Newtonschen Kontinuumsströmung

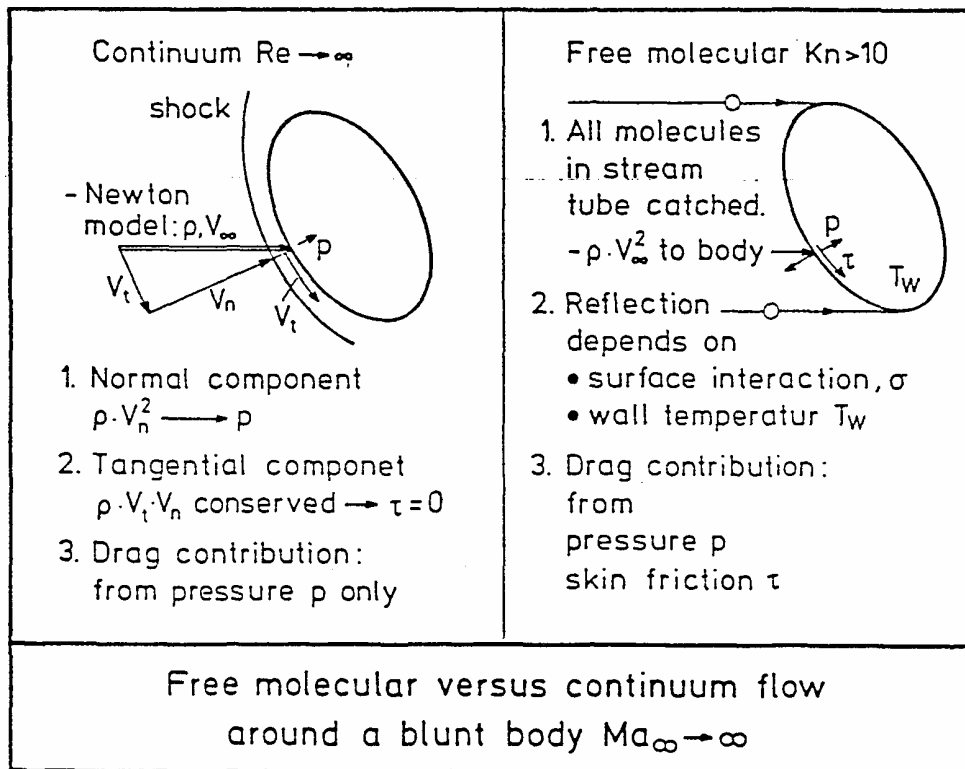


Bild 5- 3 Vergleich der freimolekularen und Newtonschen Hyperschallströmung um einen stumpfen Körper

### 5.1.1 Die Gasoberflächenwechselwirkung.

Die Wechselwirkung eines Molekülstrahls mit einer Oberfläche ist ein Problem der Grenzflächenphysik. Technische Oberflächen sind belegt mit adsorbierten Molekülen wobei die Wechselwirkung primär mit dieser Grenzflächenschicht stattfindet.

Trotz intensiver Forschung wird für praktische Anwendung die Wechselwirkung noch immer mit einfachen Modellen und empirischen Parametern den Akkommodationskoeffizienten beschrieben. Man unterscheidet zwischen den beiden Grenzfällen der spiegelnden und diffusen Reflektion, die im folgenden Bild 5.2 erläutert werden.

spiegelnd (Index rs)	diffus (Index W)	gemischt (Index r)
$\dot{n}_{rs} = \dot{n}_i$	$\dot{n}_i = \dot{n}_W = \frac{n_W}{2 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot c'_W; c'_W = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{m} \cdot T_W}$ $\rightarrow n_W = 2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\dot{n}_i}{c'_W}$	$\dot{n}_r = \dot{n}_i$
$\tau_{rs} = \tau_i$	$\tau_W = 0$	$\tau_r$ : Berechnung erfolgt durch
$p_{rs} = p_i$	$p_W = \frac{m}{4} \cdot n_W \cdot c'_W{}^2$ $= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot m \cdot \dot{n}_i \cdot c'_W$ $= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot m \cdot \dot{n}_i \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{k}{m} \cdot T_W}$	$p_r$ : empirische Beschreibung des Reflektionsverhalten mit Akkommodationskoeffizienten a. Maxwell b. Schaaf
Reflektion hängt nur vom Einfallzustand ab	Reflektion hängt nur vom Wandzustand ab.	

**Bild 5- 4 Die spiegelnde , diffuse und gemischte Reflektion von Molekülen an der Oberfläche**

Bei der idealisierten spiegelnden Reflektion wird ein einfallender Molekülstrahl mit dem Geschwindigkeitsvektor  $\xi_i$  wie ein Lichtstrahl am Spiegel reflektiert.

Hierbei ist wichtig:

- Tangentialkomponente des Geschwindigkeitsvektors bleibt erhalten. Der abströmende Tangentialimpulsfluss ist gleich dem einfallenden. Insgesamt wird keine Wandschubspannung erzeugt.  $\tau = \tau_i - \tau_r = 0$
- Die Normalkomponente des Geschwindigkeitsvektors ändert Vorzeichen nach der Reflektion. Doppelte Druckwirkung  $p = p_i + p_r = 2p_i$  da  $p_r = p_i$ .
- Kein Energieaustausch da Betrag der Geschwindigkeit erhalten bleibt.
- Wandtemperatur beeinflusst die Reflektion nicht.

#### Die diffuse Reflektion.

Hierbei wird ein einfallender Molekülstrahl zunächst von der Oberfläche adsorbiert. Die Moleküle nehmen dabei die Oberflächentemperatur an (vollständige Akkommodation) und verlassen dann die Oberfläche in einer diffusen molekularen Efusion mit einer Raumwinkelverteilung nach dem Lambertschen Cosinusetz.

.Wichtig ist hierbei:

- a. Bei der diffusen Reflektion liefert nur der einfallende Fluss einen Beitrag zur Wandschubspannung  $\tau = \tau_i$ ;  $\tau_r = 0$
- b. Der Druckbeitrag der reflektierten Moleküle wird durch die Wandtemperatur  $T_w$  bestimmt. Die Moleküle verlassen die Oberfläche mit einer thermischen Geschwindigkeit die durch  $c'_w$  vorgegeben ist.  $c'_w = \sqrt{2RT_w}$   
 Je höher  $T_w$  desto größer  $p_{rw}$ .

In der Praxis wird meist die diffuse Reflektion beobachtet. Um das in Bild 5.2 skizzierte abweichende Reflektionsverhalten zu beschreiben benutzt man die Akkommodationskoeffizienten.

**Das Maxwell'sche Model der Gasoberflächenwechselwirkung.**

Dieses Model besagt, dass ein Bruchteil  $\sigma$  der einfallenden Moleküle diffus reflektiert wird und der restliche Bruchteil  $1-\sigma$  spiegelnd reflektiert wird. Der diffuse reflektierte Anteil  $\sigma$  hat sich an die Oberflächenbedingung (Wandtemperatur) angepasst, deshalb wird  $\sigma$  als Akkommodationskoeffizient bezeichnet.

$\sigma$  Diffus reflektierter Bruchteil des einfallenden Flusses (5.5)

$1 - \sigma$  Spiegelnd reflektierter Bruchteil des einfallenden Flusses (5.6)

**Die Schaf'schen Akkommodationskoeffizienten**

Schaf benutzt im Gegensatz zu Maxwell für jede Flussgröße einen Akkommodationskoeffizienten. Flussgrößen sind dabei Normalimpuls  $p$ ; Tangentialimpuls  $\tau$  und Energiefluss  $e$ . Jeder Akkommodationskoeffizient beschreibt in wie weit der spezifische Austauschvorgang diffus oder spiegelnd erfolgt.

Tangentialimpulsfluss:  $\sigma_\tau = \frac{\tau_i - \tau_r}{\tau_i - \tau_w}$ ;  $\tau_r = (1 - \sigma_\tau)\tau_i$  (5,7)

Normalimpulsfluss  $\sigma_N = \frac{p_i - p_r}{p_i - p_w}$ ;  $p_r = \sigma_w p_w + (1 - \sigma_N)p_i$  (5,8)

Energiefluss  $\sigma_E = \frac{e'_i - e'_r}{e'_i - e'_w}$ ;  $e'_r = \sigma_E e'_w + (1 - \sigma_E)e'_i$  (5,9)

Der Index w bezeichnet den diffus reflektierten Fluss, berechnet mit der Wandtemperatur  $T_w$ . Für den Spezialfall  $\sigma_\tau = \sigma_N = \sigma_E$  degeneriert das Schaafsche Modell zum Maxwell'schen.

Die mit der Wandtemperatur  $T_w$  diffus reflektierten Flüsse tragen zu Druck und Wärmeübergang wie folgt bei:

Wandschubspannung:  $\tau_w = 0$

Druck: 
$$p_w = \frac{\sqrt{\pi}}{2} m^* n_i \sqrt{2 \frac{k}{m} T_w} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} m'_i \sqrt{2RT_w} \quad (5,10)$$

Energieabtransport: 
$$e'_w = m n_i \sqrt{2 \frac{k}{m} T_w} = m'_i \sqrt{2RT_w} \quad (5,11)$$

hierbei sind m Masse eines Moleküls,  $n_i$  der einfallende Teilchenstrom und k die Boltzmannkonstante.

### 5.1.2 Die lokalen freimolekularen Beiwerte bei $S = \infty$

Wir bezeichnen den Winkel zwischen lokaler Tangentialebene Anströmvektor mit  $\vartheta$  und erhalten für die auf ein Oberflächenelement einfallenden Flüsse

#### Beiträge der einfallenden Flüsse

Massenfluss: 
$$m'_i = \rho_\infty V_\infty \sin(\vartheta) \quad (5,12)$$

Druck infolge Normalimpulsfluss 
$$p_i = [\rho_\infty V_\infty \sin(\vartheta)] V_\infty \sin(\vartheta) = \rho_\infty V_\infty^2 \sin^2(\vartheta)$$

Wandschubspannung infolge Tangentialimpulsfluss:

$$\tau_i = [\rho_\infty V_\infty \cos(\vartheta)] V_\infty \sin(\vartheta) = \rho_\infty V_\infty^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta)$$

Energiefluss

$$e_i = [0,5 \rho_\infty V_\infty^2] V_\infty \sin(\vartheta) = 0,5 \rho_\infty V_\infty^3 \sin(\vartheta)$$

#### Beiträge der reflektierten Flüsse.

Bei spiegelnder Reflektion gilt entsprechend Bild:5.3

$$m'_r = m'_i; \quad p_r = p_i; \quad \tau_r = \tau_i; \quad e'_r = e'_i \quad (5,13)$$

Bei diffuser Reflektion gilt entsprechend Bild 5.3 und Gleichungen 5.8 und 5.9

$$m'_r = m'_i = \rho_\infty V_\infty \sin(\vartheta); \quad p_r = p_w = \frac{\sqrt{\pi}}{2} m'_i \sqrt{2RT_w}; \quad \tau_r = 0; \quad (5,14)$$

$$e'_r = e'_w = m'_i 2RT_w$$

Mit den Ansätze der Gleichungen 5.1 bis 5.4, mit der Akkommodationskoeffizienten - Definition (5.5) bis (5.9) und den Flussformeln (5.12), (5.14) ergeben sich die folgenden Formeln für lokalen Druck, Wandschubspannung und Energiefluss:

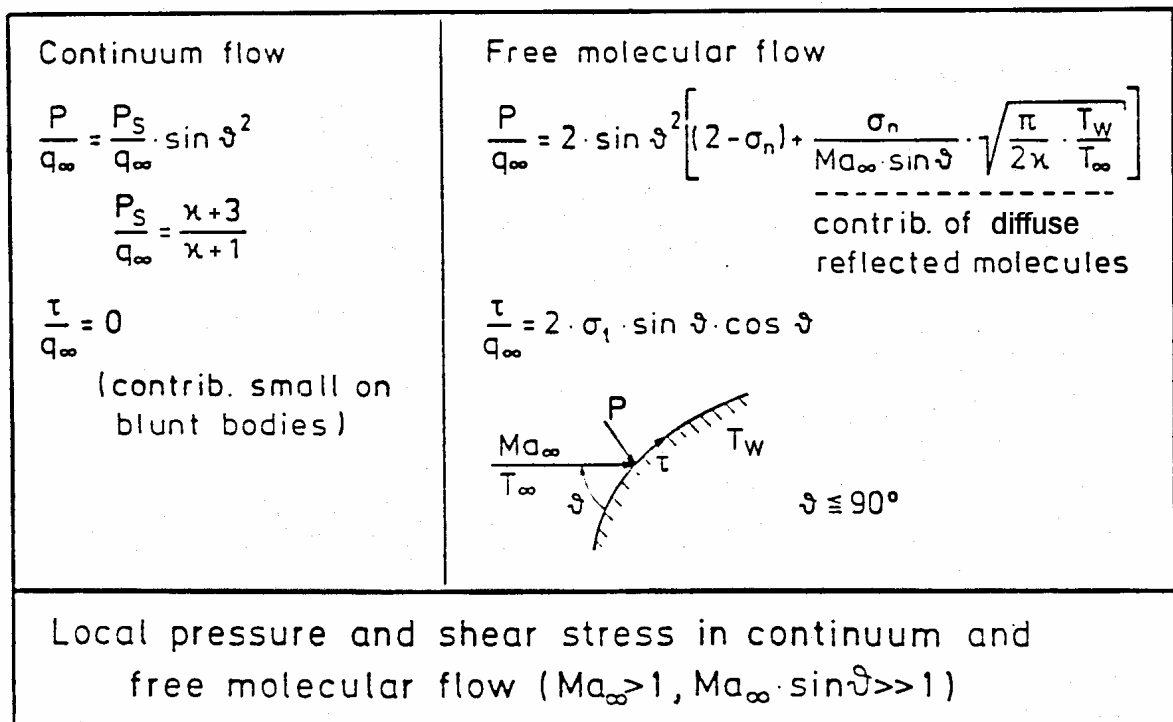
$$\text{Druck: beiwert: } \frac{p}{q_\infty} = 2 \sin^2(\vartheta) \left[ (2 - \sigma_N) + \frac{\sigma_N}{Ma_\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2\kappa}} \sqrt{\frac{T_w}{T_\infty}} \right] \quad (5.15)$$

$$\text{Wandschubspannung } \frac{\tau}{q_\infty} = 2\sigma_\tau \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \quad (5.16)$$

$$\text{Wärmeübergang } \frac{e'}{0,5\rho_\infty V_\infty^3} = \sigma_E \sin(\vartheta) \left[ \left(1 - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{1}{\kappa Ma_\infty^2} \frac{T_w}{T_\infty}\right) \right] \quad (5.17)$$

Die Gleichungen gelten auch für die Maxwell'sche Gasoberflächenwechselwirkung. Für diesen Fall müssen allen Akkommodationskoeffizienten identische Werte zugeordnet werden, also  $\sigma_\tau = \sigma_N = \sigma_E = \sigma$ .

Das folgende Bild 5-5 vergleicht die Druck- und Schubspannungsformeln nach der Newtonschen Kontinuumstheorie mit den frei molekularen Formeln.



**Bild 5- 5 Vergleich von Druck und Wandschubspannung in Newtonscher Kontinuumsströmung und in frei molekularer Strömung**

### 5.1.3 Beiwerte von stumpfen Körpern im frei molekularen Hyperschall.

#### a .Die Kraftbeiwerte.

Die Gesamtbeiwerte von Körpern können wir ebenfalls aufteilen in Beiträge, die aus den einfallenden Flüssen resultieren und den Beiträgen der reflektierten Moleküle. Für stumpfe Körper im Hyperschall mit  $Ma \sin \vartheta > 1$  und  $Ma \gg 1$  transportieren die einfallenden Moleküle nur Impuls in Strömungsrichtung zum Körper. Der gesamte Fluß innerhalb der in Strömungsrichtung projizierten Fläche wird vom Körper erfasst. Dies erläutert auch Bild 5.3. Bildet man die Beiwerte mit dieser projizierten Fläche so ergibt sich.

$$C_{W,i} = 2; \quad \text{für alle Körperformen}$$

$$C_{A,i} = 2; \quad \text{für alle Körperformen}$$

$$C_{W,r} = \text{Funktion (Körperform; } T_W/T_\infty; \sigma)$$

$$C_{A,r} = \text{Funktion (Körperform; } T_W/T_\infty; \sigma)$$

Für eine kalte Wand  $T_W/T_\infty < 1$  und diffuse Reflektion mit  $\sigma = 1$  tragen auch reflektierte Moleküle nicht zu den Kräften bei.

Für die senkrecht angeströmte Platte ergeben sich folgende Widerstandsbeiwerte:

$$Ma_\infty = \infty, \quad \text{diffuse Reflektion und } T_W/T_\infty = 0: \quad C_W = 2$$

$$Ma_\infty = \infty, \quad \text{spiegelnde Reflektion; } T_W/T_\infty = \text{beliebig} \quad C_W = 4$$

Das folgende Bild 5.6 vergleicht die gemessenen und berechneten Widerstandsbeiwerte eines  $45^\circ$  Kegels in Abhängigkeit von der Wandtemperaturverhältnis  $T_W/T_0$ .

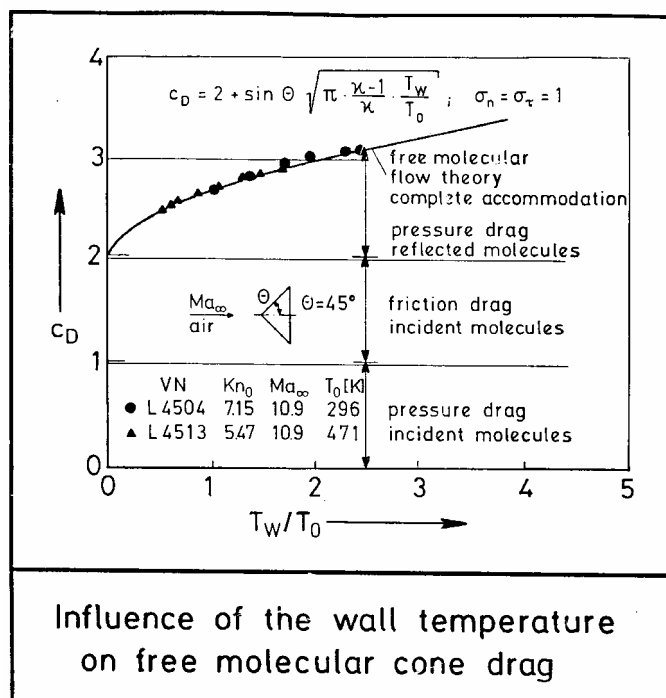


Bild 5- 6 Widerstandsbeiwert eines  $45^\circ$  Kegel in Abhängigkeit von Wandtemperatur  
Kap. 5. Seite 8

In dieser Auftragung ist die Wandtemperatur  $T_w$  mit der Ruhetemperatur  $T_0$  normiert.  $T_w/T_0 = 0$  entspricht einem kalten Körper und  $T_w/T_0 > 1$  einem aerodynamisch heißen Kegel. Das Bild zeigt die Aufteilung des Widerstandsbeiwertes entsprechend den Wirkungsursachen.

Zwischen  $T_w/T_0$  und  $T_w/T_\infty$  gilt für  $Ma \gg 1$  folgende Beziehung.

$$T_0/T_\infty = \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \text{ dies ergibt } \frac{T_w}{T_0} = \frac{2}{(\kappa - 1)} \frac{1}{Ma^2} \frac{T_w}{T_\infty}$$

### Der Wärmeübergang für $Ma \gg 1$ ; Recovery Temperatur und Stantonzahlen

Für den lokalen Wärmeübergang gilt Formel 5.16

$$\frac{e'}{0,5\rho_\infty V_\infty^3} = \sigma_E \sin(\vartheta) \left[ 1 - \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{1}{\kappa Ma_\infty^2} \frac{T_w}{T_\infty} \right]$$

Der lokale Wärmeübergang  $e'$  wird Null wenn der Ausdruck in der eckigen Klammer null ist. Dies ist die Bedingung für die frei molekulare Recovery-Temperatur.

$T_r = T_w$  für  $e' = 0$ .

Auflösung der Gleichung liefert :

$$\frac{T_r}{T_\infty} = \frac{\kappa(\kappa - 1)}{(\kappa + 1)} Ma_\infty^2$$

mit  $T_0/T_\infty = \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2$  folgt  $\frac{T_r}{T_0} = \frac{2\kappa}{(\kappa + 1)}$

Dies bedeutet, im freimolekularen Bereich wird für  $Ma \gg 1$  die Recovery-Temperatur höher als die Stautemperatur..

Für eine kalte Wand mit  $T_w < T_r$  kann die obigen Gleichung 5.16 vereinfacht werden und es gilt für die vereinfachte Stantonzahlen:

Lokale St:  $St = \frac{e'}{0,5\rho_\infty V_\infty^3} = \sigma_E \sin(\vartheta)$

Integrale ST:  $ST = \frac{E'}{0,5\rho_\infty V_\infty^3} \frac{1}{Ap} = \sigma_E * 1$

Hierbei ist AP die in Strömungsrichtung projizierte Referenzfläche des Körpers.

Die vereinfachte Stantonzahl nimmt deshalb in hypersonisch frei molekularer Strömung den maximalen Wert von  $ST = 1$  an.

Bildet man die exakte Definition der Stantonzahl so ergibt sich:

$$ST = \frac{E'}{\rho_\infty V_\infty cp(T_r - T_w)} \frac{1}{Ap} = \frac{\kappa + 1}{2\kappa}$$

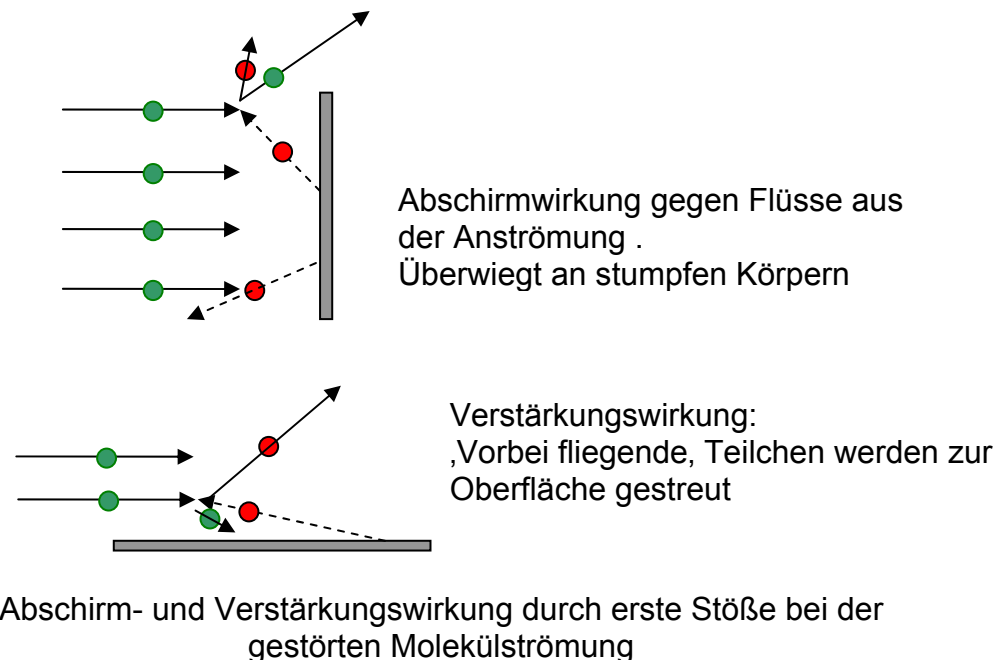
Für  $\kappa = 1,4$  ergibt sich mit  $ST = 0,86$  ein Wert etwas niedriger als 1.

## 5.2 Der gaskinetische Übergangsbereich.

Im Bereich der gestörten Molekülströmung  $Kn \sim 1$  finden erste Stöße zwischen den reflektierten und den Molekülen der Anströmung statt. Diese Stöße streuen ankommende Teilchen aus dem Strömungsfeld, sie wirken deshalb abschirmend gegen die Flüsse der Anströmung. Durch diese Abschirmwirkung nehmen der Widerstand und der Wärmeübergang mit abnehmender Knudsenzahl ab.

In Sonderfällen, wie der längs angeströmten Platte, können die ersten Stöße für einen zusätzlichen Fluss zur Oberfläche führen. In diesem Fall nimmt der Widerstand beim Verlassen des molekularen Bereichs zunächst zu.

Das nächste Bild 5-7 erläutert dies.




**Bild 5- 7 Abschirm- und Verstärkungswirkung durch erste Stöße bei der gestörten Molekülströmung**

Die Abbildung 10 ‚Wandschubspannung an längs angeströmter Platte‘ im Kapitel 4.3 zeigt einen Sonderfall der Verstärkung.

### 5. 2.1 Widerstandsbeiwerte im gaskinetischen Übergangsbereich

Zur Erläuterung des Strömungsverhaltens benutzen wir zunächst einfache Körper nämlich die quer angeströmte Kreisscheibe und die Kugel.

Im nächsten Bild sind für diese beiden Körper die Widerstandsformeln für die Grenzfälle Kontinuum- und frei molekulare Strömung zusammengestellt.

The disc perpendicular to the flow 

This body experiences only pressure drag and the limiting values are:

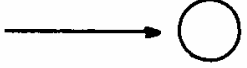
Continuum (modified Newton)

$$c_D = c_{DP} = \frac{\kappa+3}{\kappa+1} \cdot$$

Free molecular flow ( $Ma_\infty \gg 1$ )

$$c_D = c_{DP} = 2 \cdot (2 - \sigma_N) + \sigma_N \cdot \sqrt{\pi \cdot \frac{\kappa-1}{\kappa} \cdot \frac{T_W}{T_0}} \cdot$$


---

The sphere 

The drag of a sphere has contributions from skin friction  $F$  and from pressure  $p$ .

The limiting values are:

Continuum:  
(Modif. Newton)  $c_D = c_{DP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\kappa+3}{\kappa+1}$

Free molecular:  $c_D = c_{DP} + c_{DF}$

$$= \left( 2 - \sigma_N + \frac{2}{3} \sigma_N \cdot \sqrt{\pi \cdot \frac{\kappa-1}{\kappa} \cdot \frac{T_W}{T_0}} \right)_p + (\sigma_T)_F \cdot$$

Die gemessenen Widerstandsbeiwerte dieser Körper sind in den folgenden beiden Bildern als Funktion der Reynoldszahl  $Re_2$  aufgetragen. Zwischen  $Re_2$  und  $Kn_\infty$  besteht die Beziehung  $Kn_\infty \sim 1/Re_2$ .

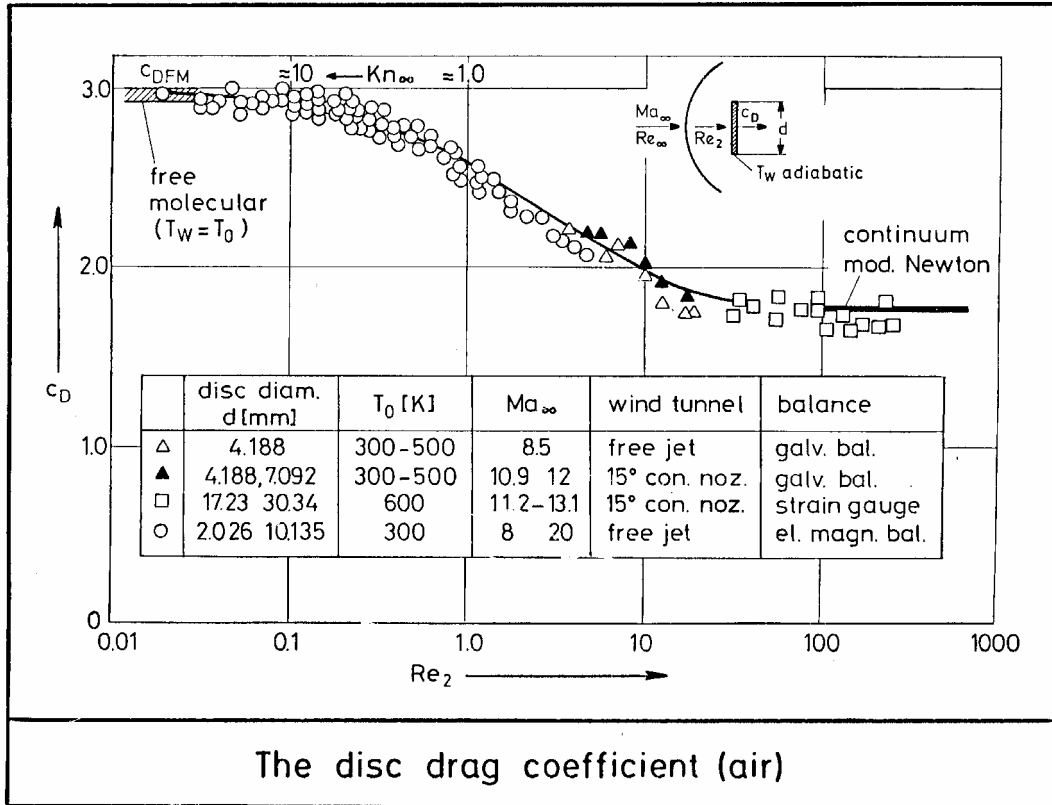


Bild 5- 8 Widerstandsbeiwert einer Kreisscheibe im Bereich von molekularer bis Kontinuumströmung ,  $Kn_{\infty} \sim 1/ Re_2$

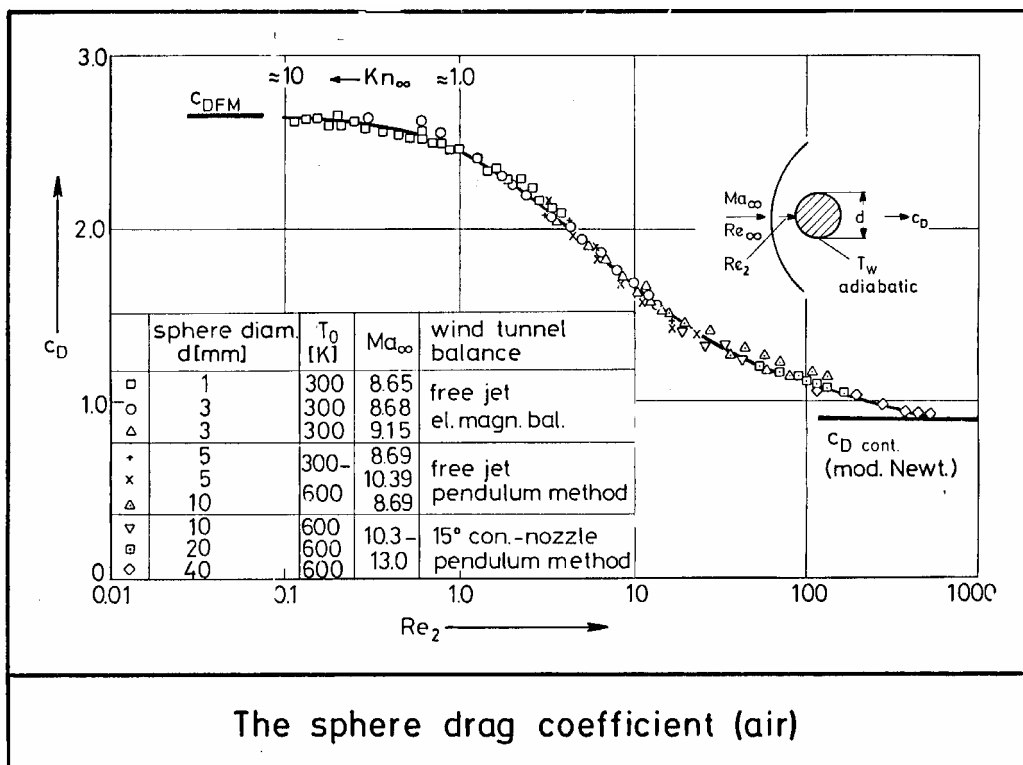
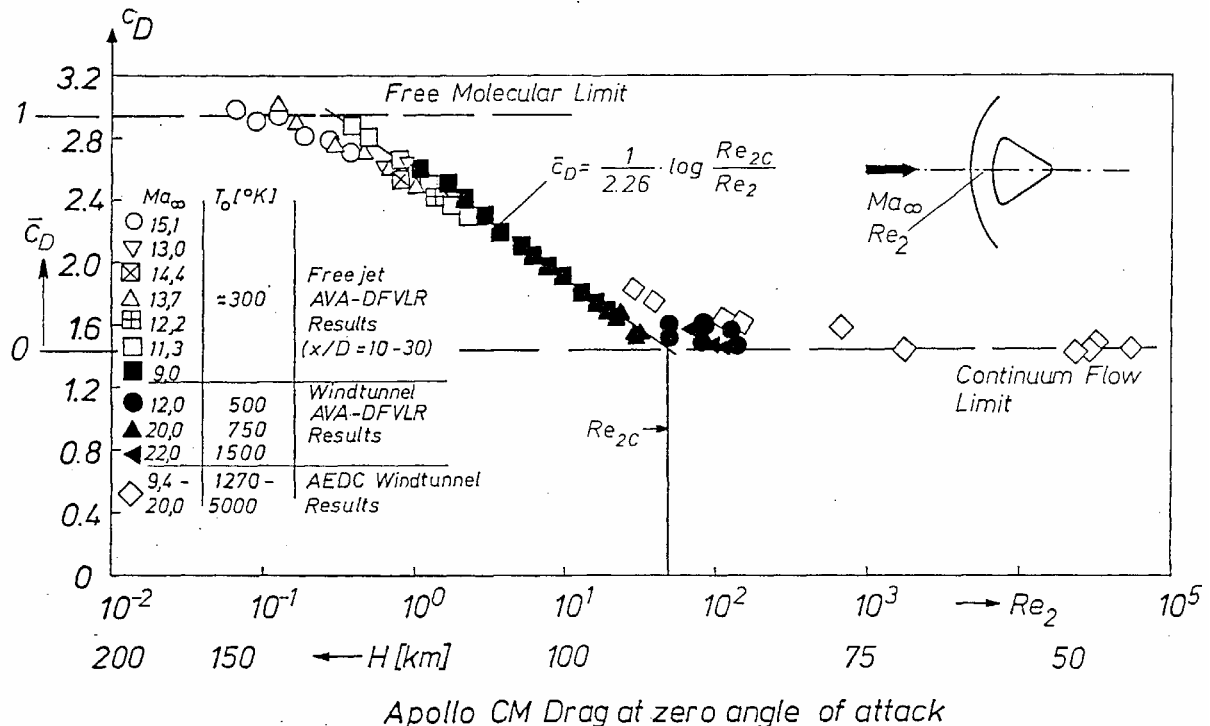


Bild 5- 9 Widerstandsbeiwert einer Kugel im Bereich von molekularer bis Kontinuumströmung ,  $Kn_{\infty} \sim 1/ Re_2$

Man ersieht, dass ausgehend vom frei molekularen der Widerstand kontinuierlich abnimmt und im Kontinuum den Grenzwert nach der modifizierten Newtonschen Theorie erreicht. Bedingt durch die hohe Wandtemperatur  $T_w = T_0$  liegen die freimolekularen Werte über 2, sie stimmen mit der Theorie für diffuse Reflektion überein. Der in verschiedenen Windkanälen gemessene Widerstandsbeiwert der Apollo Kapsel ist in Bild 5.10 dargestellt.



**Bild 5- 10 Widerstandsbeiwert der Apollokapsel im Bereich von molekularer bis Kontinuumsströmung ,  $\text{Kn} \approx 1/ \text{Re}_2$**

Man ersieht, dass auch hier bei  $\text{Re}_2 \sim 100$  der Newtonsche Kontinuumswert des Widerstandsbeiwertes erreicht wird. Auch diese Messungen bestätigen im freimolekularen Bereich die diffuse Reflektion mit  $\sigma = 1$ .

### Der Gleitzahl A/W (bzw. L/D ) Verlauf im Übergangsbereich.

In hypersonischer Kontinuumsströmung können geflügelte Wiedereintrittskörper Gleitzahlen von etwa  $A/W = 2$  erreichen. Mit zunehmender Gasverdünnung nimmt der Widerstandsbeiwert  $c_w$  zu und der Auftriebsbeiwert  $c_A$  schwächt sich ab. Im freimolekularen geht der Auftriebsbeiwert gegen  $c_A = 0$  und damit wird auch die Gleitzahl  $A/W = 0$ . Das folgende Bild erläutert dieses Verhalten mit Messungen an der ART

Konfiguration, wobei ab  $Ma / \sqrt{Re} > 0,1$  die Messwerte auf die frei molekularen Grenzwerte extrapoliert wurden.

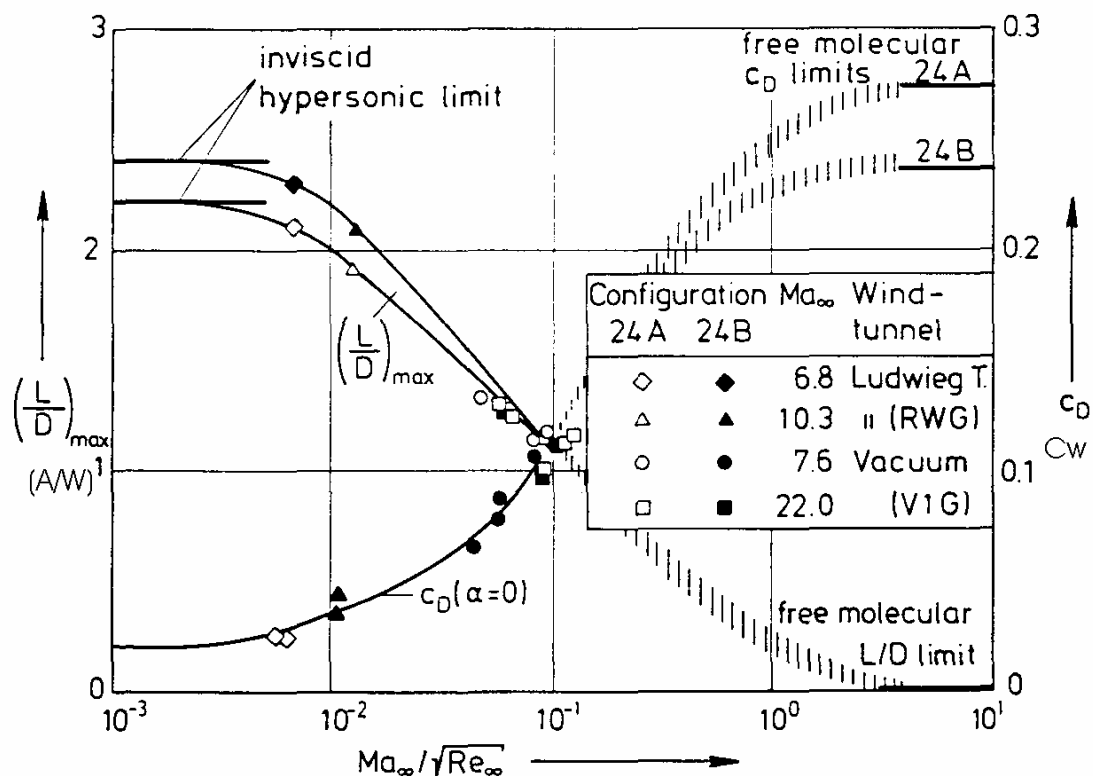


Bild 5- 11 Gleitzahl  $A/W$  und Widerstandsbeiwert von geflügelten Wiedereintrittskörpern ART 24a und 24B im gaskinetischen Übergangsbereich.

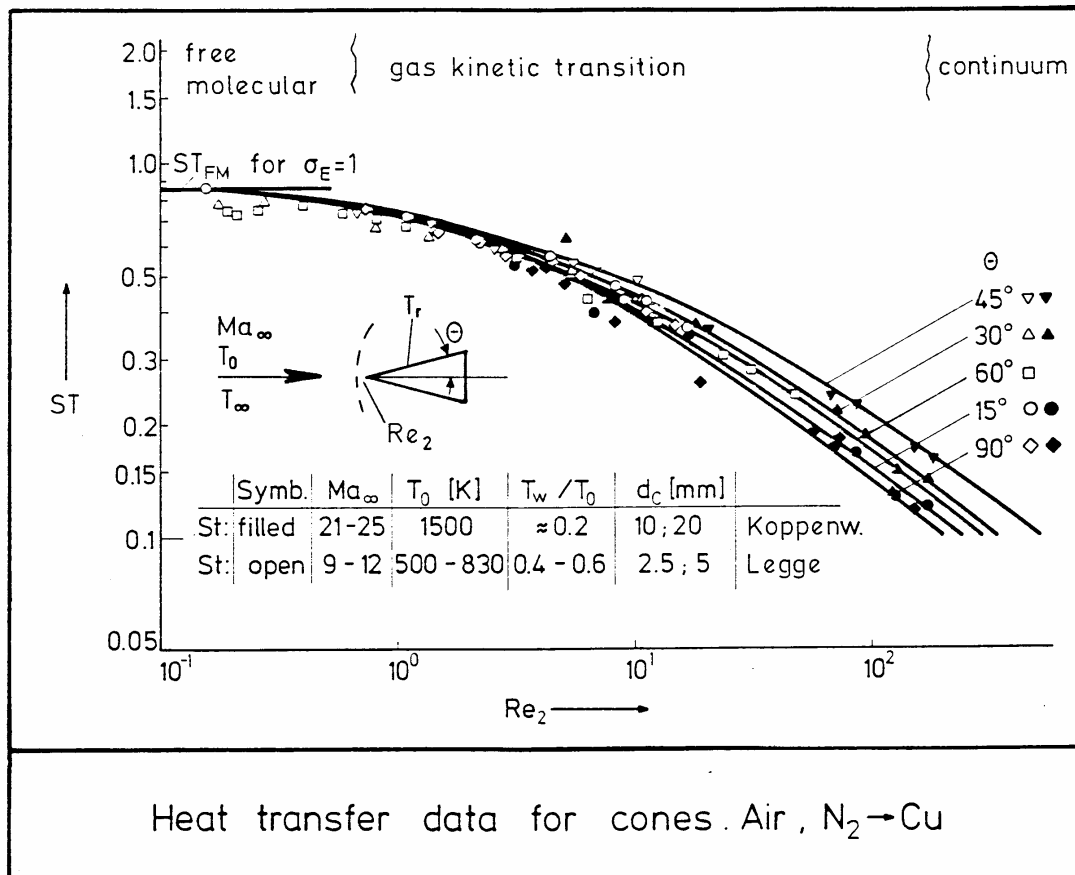
### 5. 2.2 Der Wärmeübergang im gaskinetischen Übergangsbereich

Im freimolekularen erreicht die Stanton Zahl ihren Grenzwert von  $ST = 1$  bzw.  $ST = 0,86$  bei Bildung mit  $Tr-Tw$ . Dieser Wert ist form unabhängig wenn die Stanton-zahl auf die projizierte Fläche bezogen wird.

Als Beispiele für das Verhalten im Übergangsbereich benutzen wir Messergebnisse an Kegel und Kugel. Bild 5.12 zeigt Messergebnisse an Kegel mit unterschiedlichen Halbwinkeln. Im frei molekularen ergibt sich unabhängig von der Körperform die theoretische Stantonzahl von  $ST = 0.86$ . Mit zunehmender  $Re$ -zahl nimmt die Stanton-zahl ab, wobei sich zusätzlich der Einfluss des Halbwinkels bemerkbar macht.

Die Formabhängigkeit der Stantonzahl im Kontinuum ist eindeutig bei  $Re_2 = 100$  bzw.  $Kn \sim 0,01$  zu erkennen. Die doppelt logarithmische Auftragung zeigt außerdem, dass im Kontinuum die Stantonzahlen mit  $ST \sim 1/\sqrt{Re_2}$  abfallen. Bei höheren Reynolds-zahlen nimmt im laminaren Bereich, wie im Kapitel 4 gezeigt, die Stantonzahl weiter

mit  $ST \sim 1/\sqrt{Re}$  ab, wobei der Wertebereich von  $ST$  beliebig niedrig werden kann.



**Bild 5- 12 Integrale Stantonzahlen an Kegel mit unterschiedlichen Halbwinkel im gaskinetischen Übergangsbereich**

Die Stantonzahlmessungen an Kugeln sind in Bild 5-13 dargestellt. Der frei molekulare Grenzwert von  $St = 0,86$  wird da die Reynoldszahl zu hoch nicht ganz erreicht. Mit zunehmender  $Re$ -zahl fällt  $ST$  ab und nähert sich schließlich dem nach der Lees'schen Theorie berechneten Kontinuumsverhalten mit  $ST = 2,24/\sqrt{Re_2}$

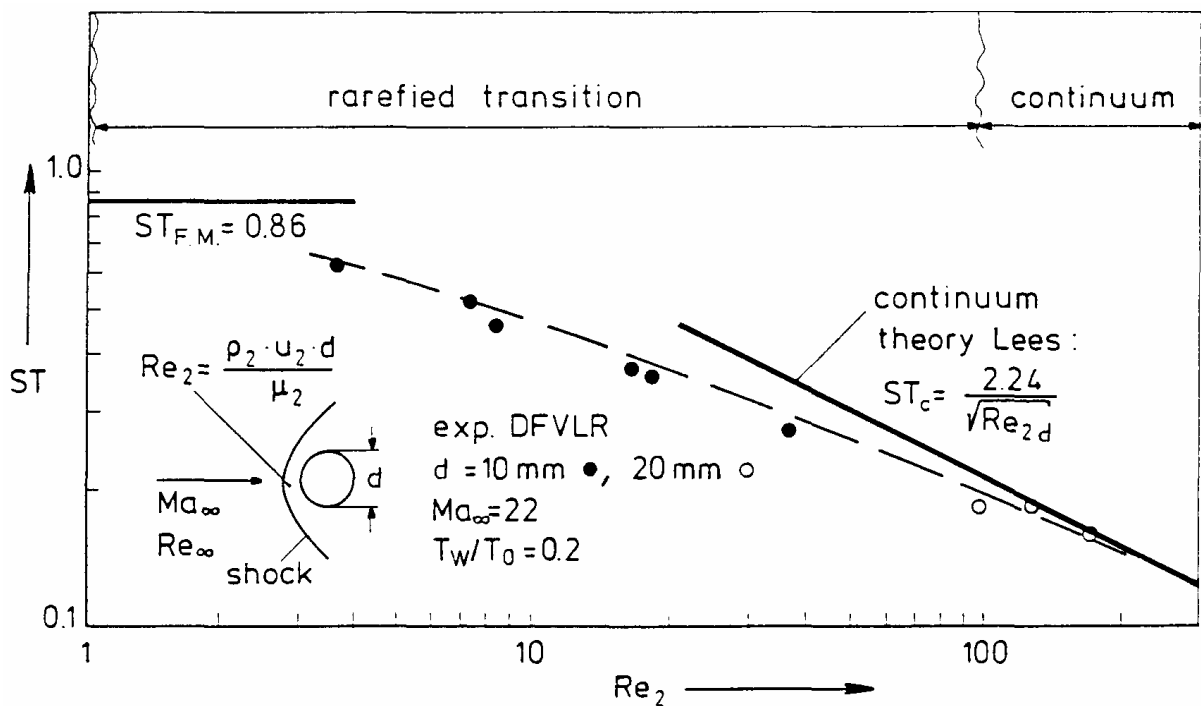


Bild 5- 13 Integrale Stantonzahlen an Kugeln im gaskinetischen Übergangsbereich

### 5.3 Berechnungsmethoden für den gaskinetischen Übergangsbereich.

Im gaskinetischen Übergangsbereich verlieren die Navier Stokes Gleichungen ihre Gültigkeit. Anwendbar ist im Prinzip die Beschreibung mit dem Boltzmann'schen Gleichungen. Leider ist dieses Gleichungssystem nur für wenige spezial Fälle lösbar. Für die praktische Anwendung stehen folgende Methoden zur Verfügung:

#### 5.31 Empirische Überbrückungsverfahren

Diese Verfahren gehen von den bekannten Lösungen und Ergebnissen für die beiden Grenzfälle molekulare Strömung  $Kn > 10$  und Kontinuumsströmung  $Kn < 0,01$  aus.

Für den Zwischenbereich wird eine Überbrückungsfunktion definiert die folgende Bedingungen erfüllen sollte.

Die beiden Grenzwerte sollten asymptotisch erreicht werden.

Im zwischen bereich sollen die Funktion experimentellen oder numerisch Ergebnisse hinreichend gut wiedergeben..

Der in Bild 5.-13 gezeigte Stantonzahlverlauf der Kugel kann z.B. durch die folgende Überbrückungsfunktion extrem gut wiedergegeben werden.

$$ST(\text{Re}_2) = \frac{ST_{\text{Cont.}}}{\left(1 + (ST_{\text{cont.}} / ST_{\text{FM}})^2\right)^{1/2}}$$

Hierbei sind für den frei molekularen und Kontinuums Grenzwert zu setzen:

$$ST_{\text{FM}} = 0,86 \quad \text{und} \quad ST_{\text{Cont.}} = 2,24 / \sqrt{\text{Re}_{2,d}}$$

### **5.3.2 Molekulare Simulationsmethoden.**

Diese Methoden simulieren die Strömung numerisch auf der molekularen Ebene. Zu nennen sind hierbei:

- a. Test Partikel Monte Carlo Methoden (TPMC) für frei molekulare Strömung
- b. Direct Simulation Monte Carlo Methode (DSMC) nach Bird für den gaskinetischen Übergangsbereich.

#### Die Test Partikel Monte Carlo Methoden (TPMC) für frei molekulare Strömung

Hierbei finden im Strömungsfeld keine gegenseitigen Molekülstöße statt. Deshalb kann die gleichzeitige Umströmung eines Körpers mit vielen Molekülen durch die Verfolgung der Bahn und der Auftreffwirkung von vielen einzelnen Molekülen (Test Partikeln) simuliert werden. Der Körper wird hierzu mit einer Kontrollbox umgeben durch dessen Flächen einzelne Moleküle nach der Maxwellverteilung statistisch verteilt ihren Flug beginnen. Die Wirkung der einzelnen Molekültreffer am Körper wird aufsummiert und bei einer hinreichend großen Anzahl  $n$  von simulierten Molekülen ( $n > 100000$ ) ergibt sich die integrale Wirkung (z. B Widerstandsbeiwert) mit hinreichen kleinen statistischen Fehler.

#### Direct Simulation Monte Carlo Methode (DSMC) nach Bird

Diese Methode wurde für den gaskinetischen Übergangsbereich entwickelt. Mit abnehmender Knudsenzahl nimmt ausgehend vom frei molekularen die Stoßrate zwischen den Molekülen im Strömungsfeld laufend zu. Die gleichzeitige Bahn- und

Stoßverfolgung aller Moleküle in einem Strömungsfeld ist derzeit auch mit den größten Rechnern nicht möglich. Bei einer freien Weglänge von 0,142 m beträgt z.B die Moleküldichte  $1,19 \cdot 10^{13}$  Moleküle/cm<sup>3</sup>.

Das Bird'sche Simulationsverfahren beruht im Prinzip darauf, dass für eine begrenzte Anzahl von Molekülen die Bewegung durch das Strömungsfeld und die gegenseitigen Stöße simuliert werden.

Der Körper wird hierzu mit einem rechteckigen Kontrollquader umgeben, der seinerseits in viele Raumzellen unterteilt ist. Die Zellenabmessung sollte etwa eine freie Weglänge betragen. Alle Zellen sollten zunächst mit Molekülen belegt sein. Die Moleküle werden normalerweise als harte, elastische Kugeln behandelt werden. Die Molekülbewegung wird in Gang gesetzt und dann in Zeitschritten  $\Delta t$  verfolgt. Entsprechend dem Ausfluss aus dem Kontrollvolumen müssen immer neue Moleküle nachgeführt werden..

Ein wichtiges Prinzip ist, dass Molekülbewegung und Molekülstöße getrennt behandelt werden.

In einem Zeitschritt  $\Delta t$  wird die Bewegung aller Moleküle verfolgt und es stellt sich eine neue Belegung der Zellen ein. Anschließend wird die Wahrscheinlichkeit von Molekülstößen in den einzelnen Zellen bestimmt und entsprechende Stöße ausgeführt. Bei der Auswahl der Stoßpartner ist deshalb eine gegenseitige Berührung nicht notwendig,

Nach Berechnung der Stöße erfolgt ein neuer Zeitschritt mit Molekülbewegung.

Der statische Fehler des Verfahrens reduziert sich mit der Anzahl N der Moleküle und der Anzahl der behandelten Zeitschritte. Bei den frei erhältlichen Programmen von Bird befinden sich etwa 50000 Moleküle im Strömungsfeld:

(n. b Programme können von Studenten über das Internet herunter geladen werden: Bird's home page ist: [www.gab.com.au](http://www.gab.com.au) )