

4. Hyperschallströmung mit Reibung und Wärmeübergang

In einer Hyperschallströmung sind Änderungen der Geschwindigkeit immer mit starken Änderungen der Temperatur verbunden. Starke Änderungen der Geschwindigkeit treten über Verdichtungsstöße und in der Grenzschicht auf. In der wandnahen Grenzschicht wird durch Reibung die Strömung stark abgebremst und erwärmt. Dies führt an der Oberfläche zur Wandschubspannung τ und Wärmeübergang q' .

Wir betrachten deshalb im Weiteren die reibungsbehaftete hypersonische Kontinuumsströmung ohne Einfluß der chemischen Reaktionen (ideales nicht dissoziierendes Gas).

Da wir im Strömungsfeld starke Temperaturänderungen erwarten müssen die dynamische Zähigkeit $\eta(T)$ und die Wärmeleitfähigkeit $k(T)$ mit ihrer Abhängigkeit von der Temperatur bekannt sein.

Nach dem Sutherlandgesetz gilt für die Zähigkeit von Luft:

$$\eta = 1,458 \cdot 10^{-6} \frac{T^{1,5}}{T + 110,4} \quad \text{für } T \gg 110,4 \text{ K folgt } \eta \approx T^{0,5} \quad [4.1]$$

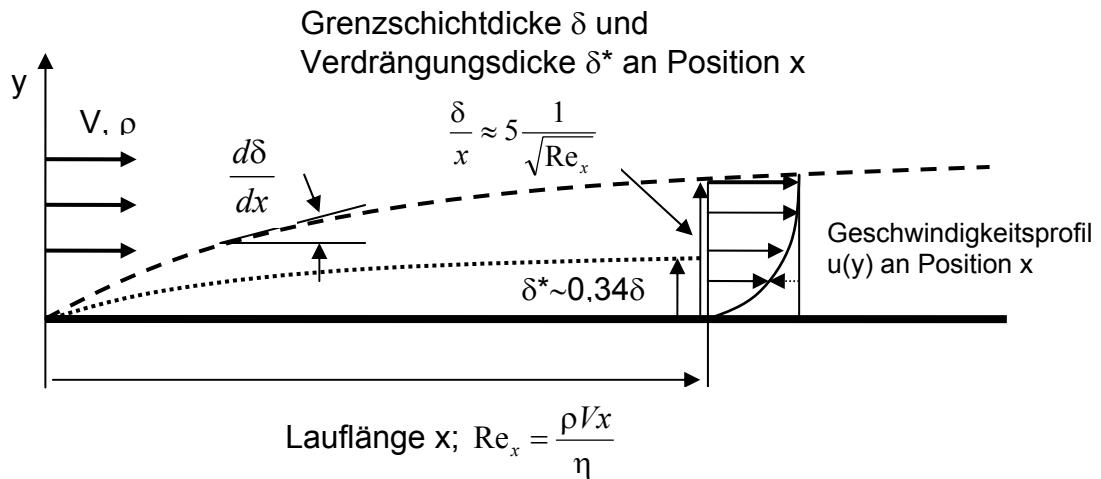
Wichtig ist, dass die Prandtlzahl Pr eine Verbindung zwischen spezifischer Wärme c_p , Zähigkeit η und Wärmeleitfähigkeit k herstellt.

$$Pr = c_p(T) \frac{\eta(T)}{k(T)} : \quad Pr = 0,75 \text{ für nicht dissoziierende Luft} \quad [4.2]$$

Wir betrachten zunächst inwieweit die Grenzschicht ein Strömungsfeld verändert.

In der Grenzschicht wird die Strömung durch Reibung abgebremst. Infolge der niedrigeren Geschwindigkeit wird die ankommende Strömung nach außen verdrängt.

Das folgende Bild 4.1 zeigt die Entwicklung einer inkompressiblen Grenzschicht an einer längs angeströmten Platte. Wichtige Kenngrößen sind die Grenzschichtdicke δ und die Verdrängungsdicke δ^* . Die Umströmung eines Körpers wird durch die mit der Verdrängungsdicke δ^* , aufgedickte Körperkontur verändert. Im Hyperschall bedeutet dies, dass sich an der längs angeströmten Platte ein Stoßschicht bildet wobei $\delta^*(x)$ die virtuelle Körperkontur bildet. Die lokale Oberflächenneigung ϑ wird durch das Anwachsen der Verdrängungsdicke $d\delta^*(x)/dx$ bestimmt.



Inkompressible Grenzschicht an der längs angeströmten Platte

Abbildung 1 Inkompressible Grenzschicht an der längs angeströmten Platte

Zur Beurteilung der Zähigkeitseinflüsse auf Widerstand, Wärmeübergang betrachten wir die im folgenden Bild 2 dargestellten Körper.

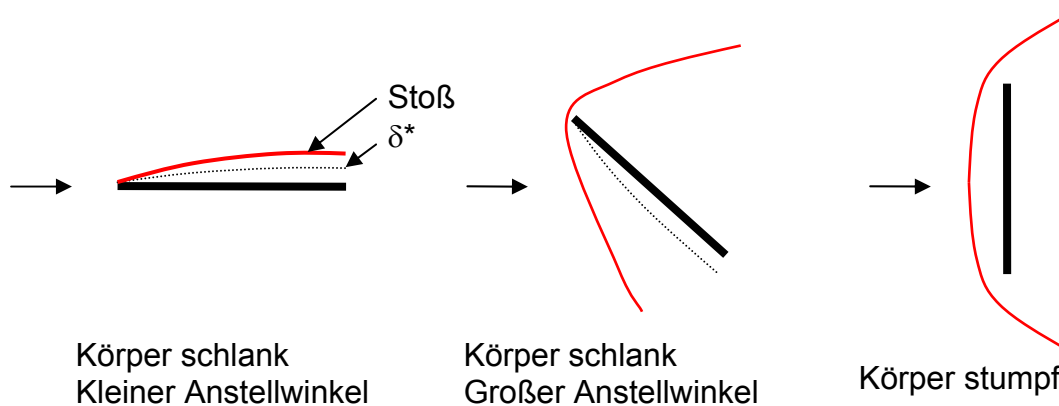


Abbildung 2 Zähigkeitseinfluß an schlanken und stumpfen Körper

Wir können die folgenden Beurteilungsregeln für den Zähigkeitseinfluß auf die Aerodynamik ableiten.

Körper	Zähigkeitseinfluß auf		
	Wärmeübergang	Widerstand	Druck, Auftrieb
Schlank Anstellwinkel niedrig Anstellwinkel groß	Hoch Niedrig	Hoch Mittel	Hoch für $d\delta/ds > 9$ Mittel für $d\delta/ds < 9$
Stumpf	dominant	mittel	Niedrig
Interferenzen	large	mittel	Mittel

Hierbei ist ϑ der lokale Anstellwinkel eines Oberflächenelements und $d\delta^*/ds$ das Anwachsen der Verdrängungsdicke mit der Grenzschichtlauflänge.

4.1 Die charakteristischen Wärmeübergangskennzahlen.

Ähnlich wie Druck- und Kraftbeiwerte werden auch lokale und integrale Wärmeübergangsbeiwerte definiert. Diese Beiwerte sind die lokale Stantonzahl St und die integrale Stantonzahl ST . Zusätzlich sind Recoveryfaktor r und Recoverytemperatur T_r wichtige Kenngrößen.

Recoveryfaktor und Recoverytemperatur

Wir betrachten einen Körper der nur im Wärmeaustausch mit der Strömung steht.

Die Recoverytemperatur T_r ist die Wandtemperatur T_w des Körpers bei der kein gegenseitiger Wärmeaustausch q' stattfindet.

Hieraus resultiert die folgende Regel für die Richtung des Wärmeübergangs.

$T_w = T_r;$	Kein Wärmeaustausch zwischen Gas und Körper	$q' = 0,$
$T_w < T_r;$	Wärmefluß vom Gas zum Körper	q' positiv
$T_w > T_r$	Wärmefluß vom Körper zum Gas	q' negativ

Zur Definition des Recoveryfaktors r betrachten wir den reibungsfreien, adiabaten und den reibungsbehafteten Aufstau einer Überschallströmung im Staupunkt eines stumpfen Körpers.

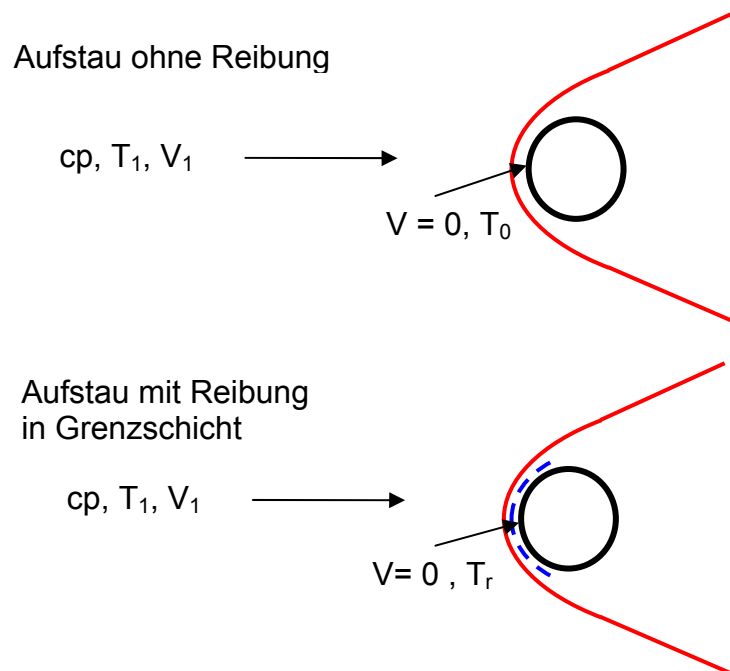


Abbildung 3 Vergleich Aufstau ohne und mit Reibung

Der Energiesatz zwischen Anströmung und Staupunkt liefert:

Ideale Staupunktströmung ideal: $cpT_1 + \frac{1}{2}V_1^2 = cpT_0$ [4.3]

Staupunktströmung mit Reibung: : $cpT_1 + r\frac{1}{2}V_1^2 = cpT_r$ [4.4]

Im reibungsbehafteten Fall kann nur ein Bruchteil r der kinetischen Energie in thermische Energie so umgesetzt werden, dass sie vom Körper aufgenommen werden kann. Damit liegt die erreichbare Wandtemperatur des Körpers niedriger als die Gesamttemperatur T_0 .

Der Recoveryfaktor r ergibt sich nach Auflösung von 4.3 und 4.4 zu:

$$r = \frac{T_r - T_1}{T_0 - T_1} \quad [4.5]$$

Für $Ma \gg 1$ bzw. $\frac{1}{2}V_1^2 \gg cpT_1$ folgt: $r = \frac{T_r}{T_0}$

Der Recoveryfaktor zeigt im Hyperschall nur eine schwache Abhängigkeit von den Anströmbedingungen. Folgende Ansätze gelten für den reibungsbehafteten Aufstau in einer laminaren bzw. turbulenten Grenzschicht.

Laminar: $r = Pr^{1/2}$ $r = 0,87$ für Luft mit $Pr = 0,75$

Turbulent: $r = Pr^{1/3}$ $r = 0,9$ für Luft mit $Pr = 0,75$

Die Stantonzahlen St und ST

Die Stantonzahlen sind wie folgt definiert:

Lokale Stantonzahl $St = \frac{q'}{\rho_\infty V_\infty cp(T_r - T_w)}$ [4.6]

Integrale Stantonzahl $ST = \frac{Q'}{\rho_\infty V_\infty cp(T_r - T_w)} \frac{1}{A_{ref}}$ [4.7]

Hierbei sind:

$T_r - T_w$ die treibende Temperaturdifferenz.

A_{ref} die Bezugsfläche, zb. Basisfläche eines Körpers bei Anstellwinkel 0 oder Oberfläche des Körpers

Wir können die Stantonzahl St nach q' auflösen und erhalten dann:

$$q' = St \rho_{\infty} V_{\infty} c_p (T_r - T_w) \quad [4.8]$$

Diese Gleichung zeigt, dass für $T_r = T_w$ der Wärmefluss null wird, und für $T_w < T_r$ bzw. $T_w > T_r$ die bereits definierten +/- Vorzeichen annimmt.

$T_r - T_w$ wird oft durch $T_0 - T_w$ ersetzt. Für $Ma \gg 1$ und $T_w \ll T_0$ ergibt sich die einfache Definition der Stantonzahlen:

$$ST = \frac{Q'}{\rho_{\infty} V_{\infty} c_p T_0} \frac{1}{A_{ref}} = \frac{Q'}{(\rho_{\infty} / 2) V_{\infty}^3} \frac{1}{A_{ref}} \quad [4.9]$$

Das folgende Bild erläutert die Definition der Integralen Stantonzahl ST

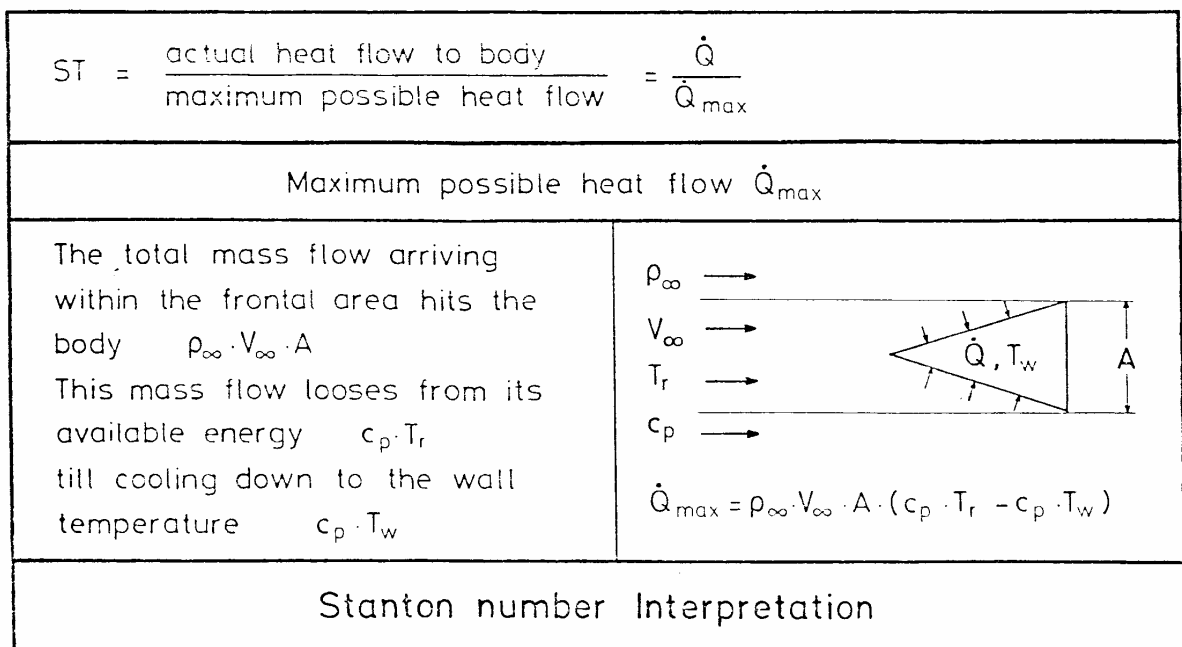


Abbildung 4 Interpretation der Stantonzahl

Ähnlich wie für lokale und integrale aerodynamische Beiwerte gilt für die Stantonzahlen St und ST die folgende Abhängigkeit.

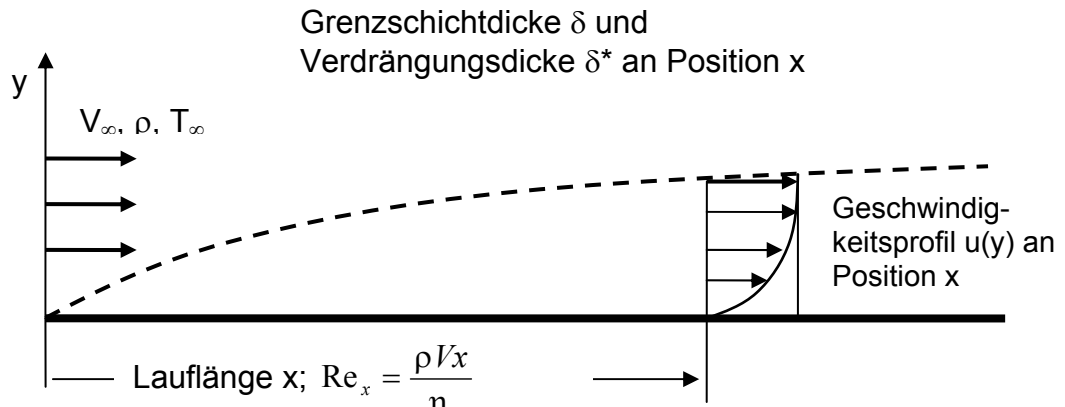
$St = \text{Funktion}(\text{Körperform}, \text{Fluglage}, \text{Machzahl}, \text{Reynoldszahl}, \text{Position am Körper})$

$ST = \text{Funktion}(\text{Körperform}, \text{Fluglage}, \text{Machzahl}, \text{Reynoldszahl},)$

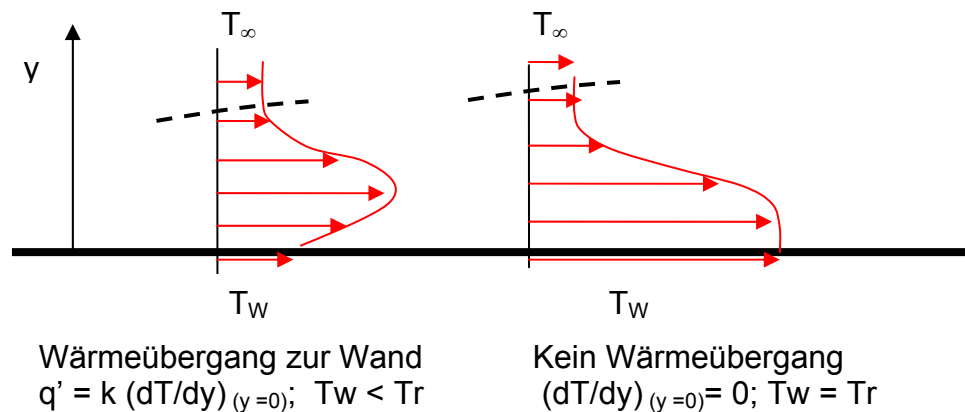
4.2 Die laminare kompressible Grenzschicht mit Wärmeübergang

Wir betrachten die Strömung längs einer ebenen Platte. Wir nehmen an, dass sich die Grenzschicht ungestört entwickeln kann. Die Grenzschicht übt keinen Einfluß auf die Aussenströmung aus, deshalb ergibt sich auf der Platte ein konstanter Oberflächendruck p , der gleich dem Aussendruck am Rande der Grenzschicht ist.

Das folgende Bild 5 erläutert die Temperaturprofile in der thermischen Grenzschicht



Temperaturprofile $T(y)$ in der Grenzschicht



Thermische Grenzschicht an der längs angeströmten Platte

Abbildung 5 Thermische Grenzschicht an der längs angeströmten Platte

Zur weiteren Behandlung benutzen wir die kompressiblen Grenzschichtgleichungen.

Impulssatz in x Richtung

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \tau}{\partial y}; \quad \text{mit } \tau = \eta \frac{\partial u}{\partial y} \quad [4.10]$$

Energiesatz:

$$\rho u \frac{\partial h_t}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h_t}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \frac{\partial h_t}{\partial y} + \eta \frac{1 - \text{Pr}}{\text{Pr}} \frac{\partial h}{\partial y} \right]; \text{ mit } h_t = cpT + \frac{1}{2}u^2 \quad [4.11]$$

Für Prandtlzahl $\text{Pr} = 1$ verschwindet im Energiesatz der letzte Term und es ergibt sich der folgende einfache Zusammenhang zwischen Geschwindigkeits- und Temperaturprofil in der Grenzschicht.

$$T(y) = T_w + (T_0 - T_w) \frac{u(y)}{V_\infty} - \frac{u(y)^2}{2cp} \quad [4.12]$$

An der Oberfläche gelten für den Wärmefluß q' zur Wand und für die Wandschubspannung τ die folgenden Bedingungen:

$$q'_w (y=0) = k \left(\frac{\partial T(y)}{\partial y} \right)_w = k(T_0 - T_w) \frac{1}{V_\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \quad [4.13]$$

$$\tau_w (y=0) = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \quad [4.14]$$

Aus diesen Beziehungen ergeben sich zwei wichtige Folgerungen a und b:

a. Definition und Wert der Recoverytemperatur T_r

Die Bedingung für keinen Wärmeübergang $q'_w = 0$ erfordert in 4.13 $T_w = T_0$

Dies bedeutet, daß für Prandtlzahl $\text{Pr} = 1$ die Recoverytemperatur wie folgt definiert

$$\text{ist: } T_r = T_w (\text{für } q' = 0) = T_0; \text{ mit } T_0 = T_\infty + \frac{1}{2cp} V_\infty^2 =$$

b. Reynoldsanalogie

Setzt man den Ausdruck für die Wandschubspannung 4.14 in 4.13 ein so folgt:

$$q'_w (y=0) = k(T_0 - T_w) \frac{1}{V_\infty} \frac{\tau_w}{\eta}$$

Transformation in lokale Stantonzahl St (4.6) und Wandschubspannungsbeiwert

$c_f' = \tau_w / [(\rho/2)V_\infty^2]$ ergibt:

$$St = \frac{1}{2} c_f'; \quad \text{für } \text{Pr} = 1 \quad (4.15)$$

Diese Beziehung zwischen lokalen Wandschubspannungsbeiwert und dem örtlichen Stantonzahl wird als Reynoldsanalogie bezeichnet.

Für Prandtlzahl Pr ungleich 1 wird oft der folgende Ansatz benutzt:

$$St = \frac{1}{2} \frac{1}{Pr^{2/3}} c_f' \quad (4.16)$$

In den obigen Formeln wird der Faktor $\frac{1}{2}$ oft als Reynoldsanalogiefaktor Ra bezeichnet. Für andere Strömungsfälle kann dieser Reynoldanalogiefaktor andere Werte annehmen.

Über die Reynoldsanalogie ist also der Wärmeübergangsbeiwert St direkt mit dem lokalen Wandschubspannungsbeiwert c_f' verbunden.

Für die kompressible Plattenströmung kann der Wandschubspannungsbeiwert mit folgender Formel berechnet werden.

$$c_f' = \frac{0,664}{\sqrt{Re_{x,\infty}}} \left(\frac{T'}{T_\infty} \right)^{-(1-\omega)/2} \quad (4.17)$$

Der erste Term $0,664/\sqrt{Re}$ berechnet den Wert der Wandschubspannung für die inkompressible Strömung. Der zweite Term berücksichtigt den Einfluß der Machzahl, der Wandtemperatur und der variablen Zähigkeit. T' wird als mittlere Referenztemperatur in der thermischen Grenzschicht bezeichnet, für welche die Zähigkeit berechnet werden soll. Für T' , auch als Eckertsche Referenztemperatur bezeichnet, gilt

$$\frac{T'}{T_\infty} = 1 + 0,32Ma_\infty^2 + 0,58\left(\frac{T_w}{T_\infty} - 1\right) \quad (4.18)$$

Für die Zähigkeit bei der Referenztemperatur wird der folgende Potenzansatz benutzt.

$$\frac{\eta(T')}{\eta(T_\infty)} = \left(\frac{T'}{T_\infty} \right)^\omega \quad \text{Für den Exponenten } \omega \text{ folgt dann: } \omega = \frac{\ln\left(\frac{\eta(T')}{\eta(T_\infty)}\right)}{\ln\left(\frac{T'}{T_\infty}\right)} \quad (4.19)$$

Die Auswertung der Gleichung 4,17 und 4,18 mit einem Exponenten im Zähigkeitsgesetz von $\omega = 0,75$ zeigt das folgende Bild 6.

Aufgetragen ist hierbei $c_f' \sqrt{Re_{x,\infty}}$ als Funktion der Machzahl Ma .

Der Wert von $c_f' \sqrt{Re_{x,\infty}} = 0,664$ bei $Ma = 0$ entspricht der inkompressiblen Blasius-Grenzschicht.

Zu Berechnung der Wärmeübergang mit Hilfe der Reynoldsanalogie gilt:

$$St = \frac{1}{2} \frac{1}{Pr^{2/3}} \frac{0,664}{\sqrt{Re_{x,\infty}}} \left(\frac{T'}{T_\infty} \right)^{-(1-\omega)/2}$$

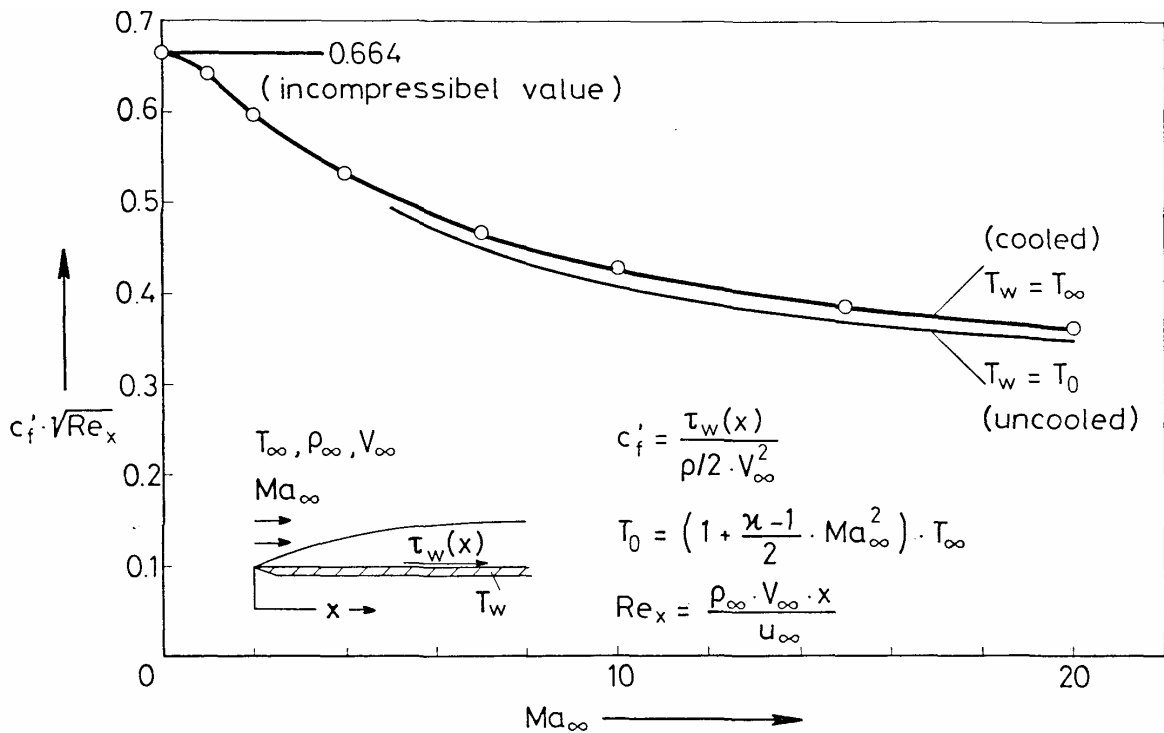


Abbildung 6 Wandschubspannungsbeiwert der längs angeströmten Platte ohne Druckgradient

4.3 Die Stoß- Grenzschichtwechselwirkung an der ebenen Platte

Hierbei handelt es sich um ein klassisches Problem, das in den 60-Jahren ausführlich untersucht wurde. An der spitzen ebenen Platte induziert die Grenzschicht infolge ihrer Verdrängungswirkung einen Verdichtungsstoß, dessen Neigung zur Vorderkante hin zunimmt. Das folgende Bild 7 skizziert das resultierende Strömungsfeld.

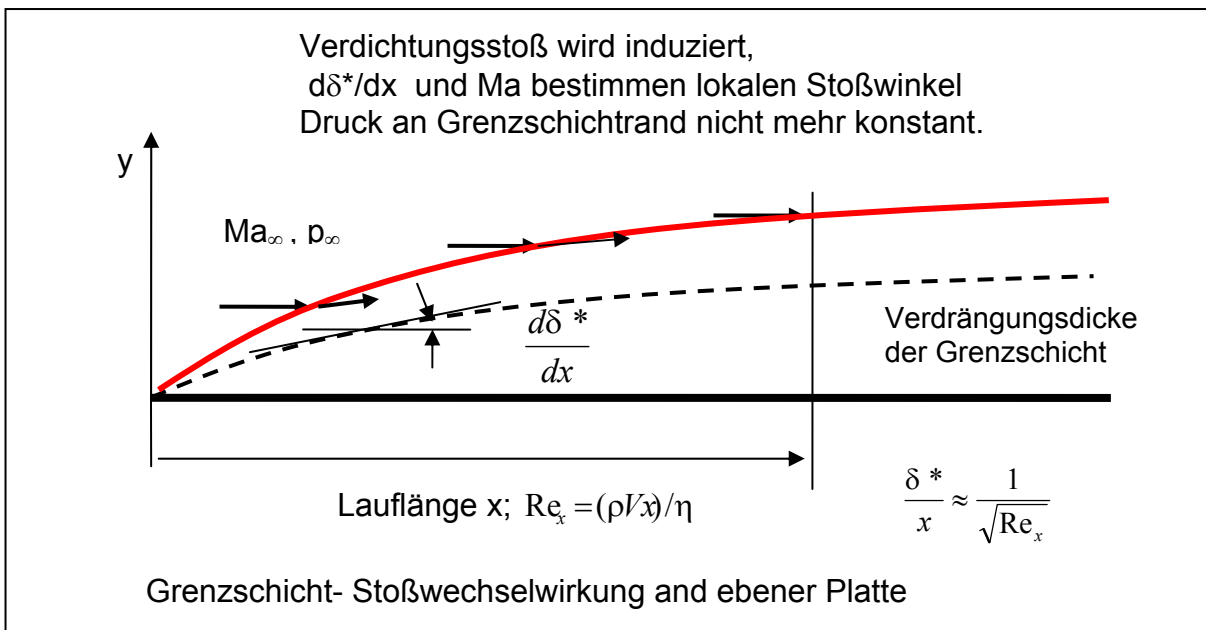


Abbildung 7 Grenzschicht- Stoßwechselwirkung and ebener Platte

Man unterscheidet zwischen der schwachen und starken Wechselwirkung.
 Zur Berechnung des Druckes hinter dem induzierten Stoß wird die hypersonische Näherungsformel (Kap. 3.4) für den schrägen Stoß benutzt, wobei der Keilwinkel ϑ durch $d\delta^*/dx$ ersetzt wird.

Die schwache Wechselwirkung für $Ma \, d\delta^*/dx < 1$, (weak interaction)

Folgende Ansätze werden in diesem Fall benutzt:

Druck p_S hinter dem Stoß :
$$\frac{p_S}{p_\infty} = 1 + \kappa Ma_\infty \frac{d\delta^*}{dx} \quad (4,20)$$

Grenzschichtneigung:
$$\frac{d\delta^*}{dx} = [\dots] \sqrt{C} \frac{Ma^2}{\sqrt{Re_{x,\infty}}} \quad (4,21)$$

Mit $C = \frac{\eta_w}{\eta_\infty} \frac{T_\infty}{T_w}$ und $[\dots] = \frac{0.968}{Ma^2} \frac{T_w}{T_\infty} + (\kappa - 1)0.145$.

Für Druck und Wandschubspannung folgt dann:

$$\frac{p(x)}{p_\infty} = 1 + \kappa [\dots] \sqrt{C} \frac{Ma_\infty^3}{\sqrt{Re_{x,\infty}}} \quad (4,22)$$

$$[c_f'(x) - c_{f0}'(x)] \sqrt{Re_{x,\infty}} = 2C [\dots]^2 \frac{Ma_\infty^3}{\sqrt{Re_{x,\infty}}} \quad (4,23)$$

Bei der schwachen Wechselwirkung wird der Wandschubspannungsbeiwert ohne Wechselwirkung $c_{f0}'(x)$ (Gleichung 4.17) um ein additives Korrekturglied ergänzt.

Die starke Wechselwirkung für $Ma \, d\delta^*/dx \gg 1$ (strong interaction)

Folgende Ansätze werden in diesem Fall benutzt:

Druck p_S hinter dem Stoß :
$$\frac{p_S}{p_\infty} = \frac{\kappa(\kappa + 1)}{2} \left(Ma_\infty \frac{d\delta^*}{dx} \right)^2 \quad (4,24)$$

Grenzschichtneigung: $\frac{d\delta^*}{dx}$ wird erheblich durch den Stoß beeinflusst

Die Ableitung von Hayes und Nagamatsu geben liefern folgendes Ergebnis:

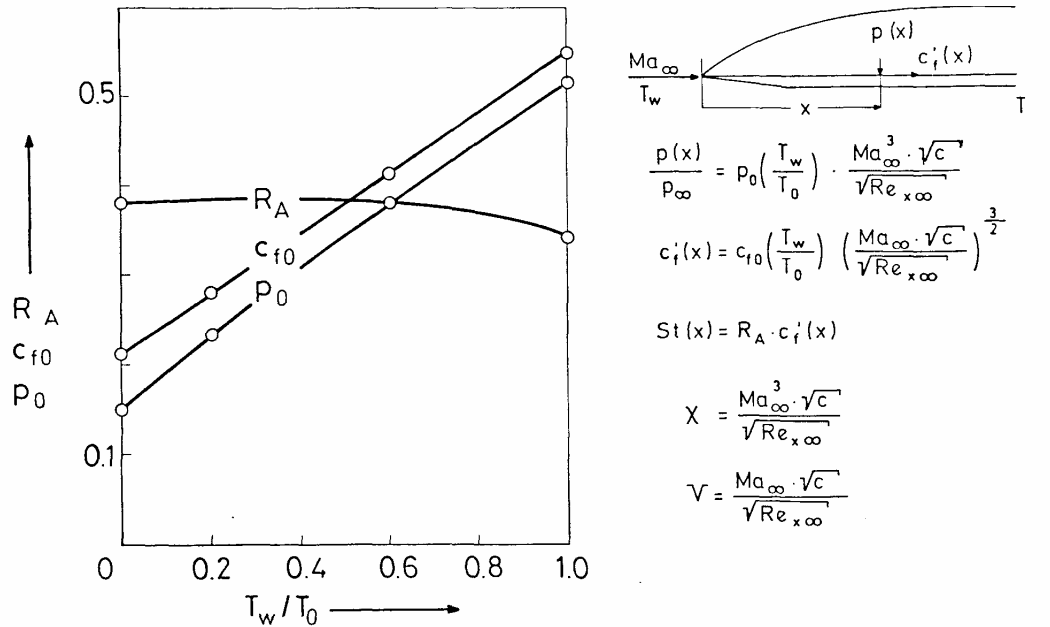
$$\frac{p(x)}{p_\infty} = P_o(T_w / T_0) \sqrt{C} \frac{Ma_\infty^3}{\sqrt{Re_{x,\infty}}} \quad (4,25)$$

$$c_f'(x) = C_{f0}(T_w / T_0) C^{3/4} \left(\frac{Ma_\infty}{\sqrt{Re_{x,\infty}}} \right)^{3/2} \quad (4,26)$$

$$St(x) = Ra * c_f'(x) \quad (4,27)$$

Hierbei sind $Po(T_w/T_0)$, $C_{f0}(T_w/T_0)$ und der Reynoldsanalogiefaktor R_A Funktionen von T_w/T_0 .

Das folgende Bild 8 gibt die wesentlichen Inhalte der starken Wechselwirkung wieder.



Strong interaction theory for flat plate (Summary based on Li, Nagamatsu, Hayes)

Abbildung 8 Starke Wechselwirkungstheorie der ebenen Platte

Die Wechselwirkungstheorien basieren auf den folgenden zwei Parametern, die Druck und Wandschubspannung beschreiben.

· Wechsewirkungspameter für Druck: :
$$\chi = \sqrt{C} \frac{Ma_\infty^3}{\sqrt{Re_{x,\infty}}} \quad (4,28)$$

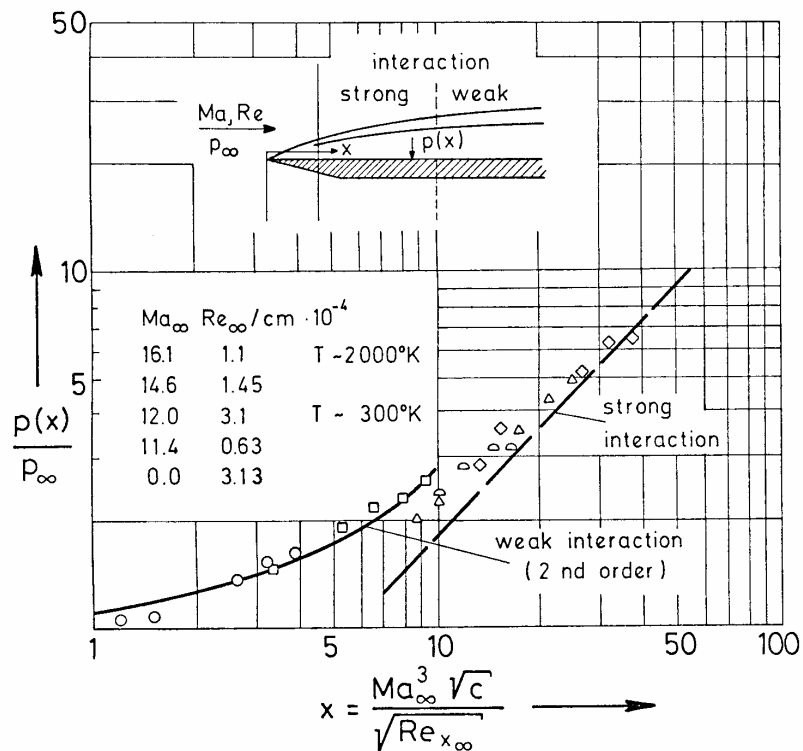
Zähigkeitsparameter V für Wandschubspannung, Wärmeübergang;

$$V = \sqrt{C} \frac{Ma_\infty}{\sqrt{Re_{x,\infty}}} \quad (4,29)$$

Zu beachten ist, dass der Zähigkeitsparameter V (Viscous parameter) der im Kapitel 2 abgeleiteten Knudsenzahl $Kn_\delta = \lambda/\delta$ entspricht, welche die Grenze der Kontinuumsströmung beschreibt.

Das folgende Bild 9 zeigt ausgewertete Druckverteilungsmessungen an einer ebenen Platte im Vergleich mit den Wechselwirkungstheorien. Meßpunkte nahe der Platten-

spitze mit kurzer Lauflänge x und kleiner Reynoldszahl ergeben einen großen Wechselwirkungsparameter und liegen rechts auf der Abszissenachse.



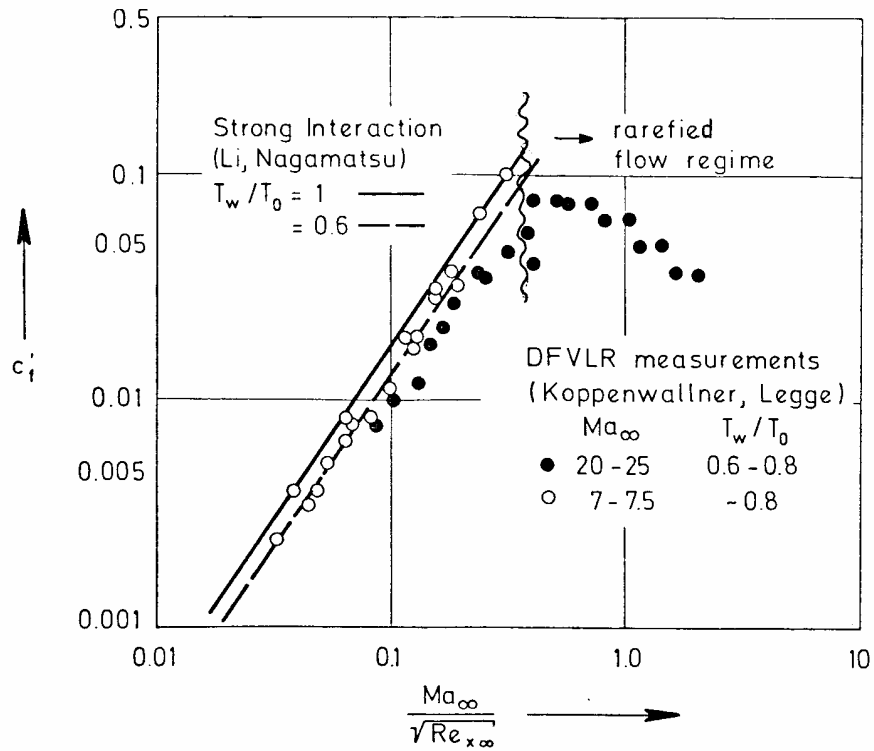
Interaction induced pressures on a flat plate

Abbildung 9 Druck an ebener Platte als Funktion des Wechselwirkungsparameter

Infolge der Stoßgrenzschichtwechselwirkung steigt der Druck in Richtung zur Plattenvorderkante an. Dies verursacht gegenüber dem reibungsfreien Fall eine Verschiebung des Druckpunktes zur Vorderkante und damit eine wesentliche Änderung der Flugstabilität (Druckpunkt soll hinter dem Schwerpunkt liegen).

Wandschubspannungsmessungen sind im Bild 10 mit der Theorie von Li, Nagamatsu verglichen. Man erkennt die lineare Abhängigkeit vom Zähigkeitsparameter Ma/\sqrt{Re} . Zu beachten ist, dass für $Ma/\sqrt{Re} > 0,2$ Abweichungen von der Kontinuumstheorie auftreten, da hier das Gebiet der Gleitströmung beginnt.

Die Kontinuumstheorie überschätzt die Wandschubspannung und damit auch den Wärmeübergang. Dies zeigt, dass bei der Anwendung von Theorien immer auf deren Gültigkeitsgrenzen zu beachten sind.



Flat plate local skin friction, theory and experiment

Abbildung 10