

3.5 Hypersonische Näherungsverfahren zur Berechnung der aerodynamischen Beiwerte.

Die aerodynamischen Beiwerte ergeben sich bei reibungsfreier Strömung aus dem Integral der Druckkraftbeiträge über der Körperoberfläche. Wir konzentrieren uns deshalb primär auf die Berechnungsmethoden für die Druckverteilung.

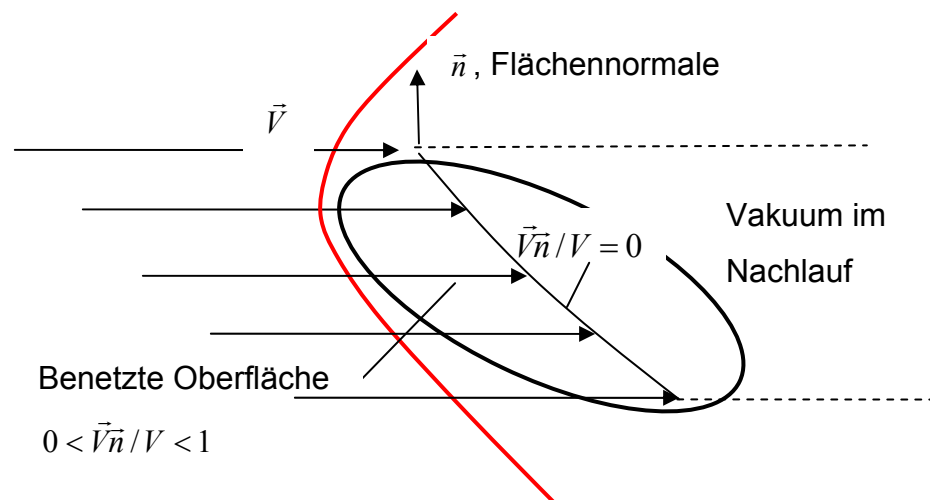
Hypersonische Näherungsmethoden sind meist lokale Methoden, wobei zwischen Druck- und Leeseite zu unterscheiden ist.

Lokale Methoden:

Örtliche Beiwerte (z.B. $c_p = p/q$) sind nur eine Funktion der Anströmung und der lokalen Eigenschaften des Oberflächenelements. Die Strömung zum betrachteten Oberflächenelement wird von der restlichen Oberfläche nicht beeinflusst.

Die Druck- und Leeseite des Körpers.

Bei stumpfen Körpern trägt im Hyperschall nur die benetzte Druckseite zu den resultierenden Gesamtkräften bei. Die Drücke auf der Leeseite können trotz der komplizierten Totwasserströmung gegenüber den Drücken auf der benetzten Fläche vernachlässigt werden. Das einfache Newtonsche Totwassermodell mit Vakuum im Nachlauf ist im folgenden Bild erläutert.



Benetzte Oberfläche und einfaches Nachlaufmodell

3.5.1 Das Newtonsche Strömungsmodell

Die Voraussetzungen sind:

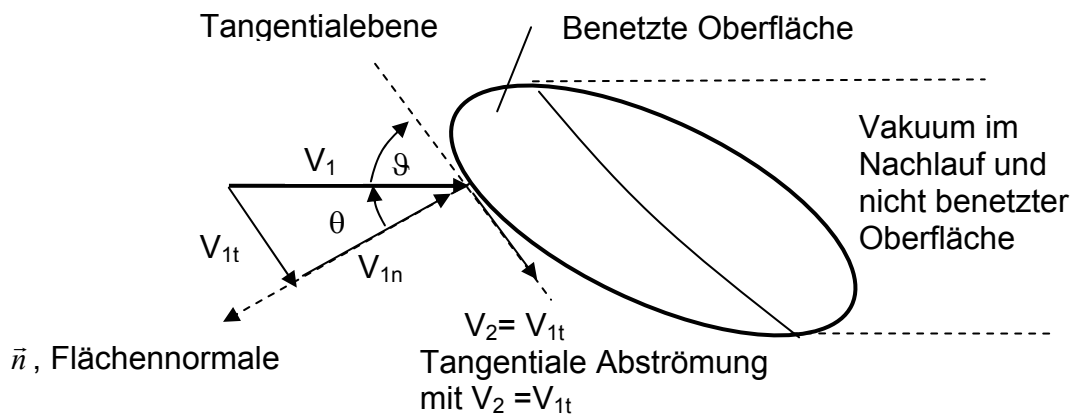
Gültigkeit der Machzahlunabhängigkeit: $Ma \gg 1$, $Ma \sin \vartheta > 1$

Das Modell nimmt an, dass die Stromlinien ungestört bis zum Oberflächenelement des Körpers vordringen. Dabei strömt das Gas tangential zur Oberfläche ab mit einer Abströmgeschwindigkeit $V_2 = V_{1t}$. Die Stoßschicht liegt damit direkt am Körper.

Die Normalkomponente des Impulsflusses wird dabei in Druck umgesetzt, während die Tangentialkomponente erhalten bleibt.

Dies entspricht einem schrägen Verdichtungsstoß in einem Gas mit einem κ Wert von $\kappa = 1$.

Das folgende Bild erläutert dieses Strömungsmodell.



Benetzte Oberfläche:

Oberflächendruck: $p = 2(\rho/2)V_1^2 \cos^2 \theta$

Wandschubspannung: $\tau = 0$

Nicht benetzte Oberfläche: $p = \tau = 0$

Das Newtonsche Strömungsmodell

Wir messen die lokale Oberflächenneigung mit dem Winkel θ zwischen Anströmvektor und Flächennormale und erhalten:

Benetzte Oberfläche:

$$\text{Oberflächendruck} \quad p = \rho V_{1n} V_{1n} = 2(\rho/2)V_1^2 \cos^2 \theta \quad (1)$$

$$p/q_1 = 2 \cos^2 \theta = 2 \sin^2 \vartheta \quad (2)$$

Wandschubspannung $\tau = 0$

Nicht benetzte Oberfläche: $p = \tau = 0$

θ Winkel zwischen Flächennormale und Anströmvektor

ϑ Winkel zwischen Tangentialebene und Anströmvektor, $\vartheta = \pi/2 - \theta$ und $\cos\theta = \sin\vartheta$

Es ist angebracht θ zu benutzen da sich $\cos\theta$ direkt aus dem skalaren Produkt zwischen Anströmvektor und dem Einheitsvektor der Flächennormalen ergibt.

$$\cos\theta = \vec{V}\vec{n}/V$$

Das modifizierte Newtonsche Model

Das normale Newtonsche Model gibt für den Staupunkt einen Druckbeiwert von

$$c_{ps} = p_s/q = 2.$$

Im Staupunkt hinter dem senkrechten Verdichtungsstoß beträgt der Druckbeiwert:

$$c_{ps} = p_s/q = (\kappa+3)/(\kappa+1) = 1,833 \text{ für } \kappa = 1,4$$

Im modifizierten Newtonschen Modell wird der Vorfaktor 2 in der Newtonschen Formel durch den exakten gasdynamischen Ausdruck ersetzt. Damit ergibt sich:

$$p/q = k_N \cos^2\theta = k_N \sin^2\vartheta; \text{ mit} \quad (3)$$

$k_N = 2$ einfaches Newton Modell

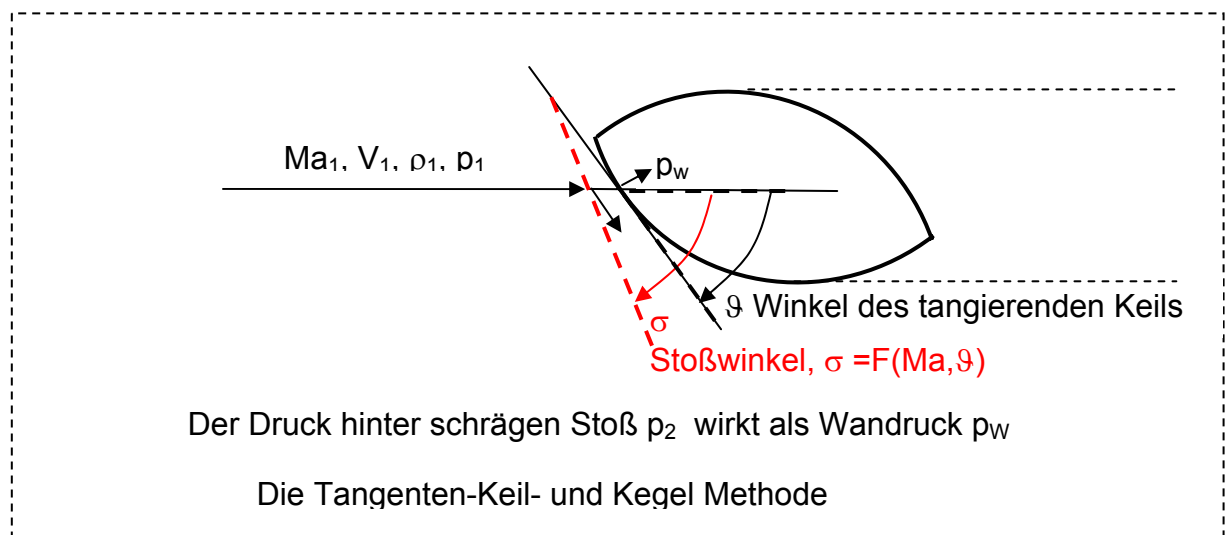
$k_N = (\kappa+3)/(\kappa+1)$, Modifizierter Newton, angepasst an exakten Staupunktswert

3.5.2 Die Tangentenkeil- und Tangentenkegel-Methoden

Hierbei handelt es sich ähnlich wie beim Newtonschen Modell um eine lokale Methode.

An das Oberflächenelement wird beim 2 dimensionalen Körper ein Tangentenkeil und beim achsensymmetrischen Körper ein Kegel gelegt. Der örtliche Oberflächen- druck wird mit den Beziehungen des schrägen Verdichtungsstoßes bestimmt.

Das nächste Bild erläutert diese Methode.



Wir können den Stoßwinkel und den Druck $p_w = p_2$ auf folgende Arten vereinfachte bestimmen.

a. Tangenten-Keil Methode. mit schrägen ebenen Stoß

a1. Körper ist hypersonisch schlank: $Ma \gg 1$; $Ma \sin \vartheta < 1$:

$$Ma_1 \sin \sigma = \frac{Ma_1 \sin \vartheta}{2} \left(\frac{\kappa + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{Ma_1^2 \sin^2 \vartheta}\right)^2} \right) = P_s(Ma_1 \sin \vartheta) \quad (4)$$

dies ergibt mit Gleichung 11 (Kap. 3.3) für $Ma \gg 1$

$$\frac{p_2}{(\rho_1/2)V_1^2} = \sin^2 \vartheta \left(\frac{\kappa + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{Ma_1^2 \sin^2 \vartheta}\right)^2} \right) + \frac{2}{\kappa Ma^2} \quad (5)$$

a2. Körper ist hypersonisch stumpf: $Ma \gg 1$; $Ma \sin \vartheta > 1$,
Tangenten- Keil Methode schrägen ebenen Stoß

$$\sin \sigma = \frac{\kappa + 1}{2} \sin \vartheta; \quad \frac{p_2}{(\rho_1/2)V_1^2} = (\kappa + 1) \sin^2 \vartheta \quad (6)$$

b. Tangenten –Kegelmethode

Für die achsensymmetrische Kegelumströmung gelten etwas andere Beziehungen zwischen Wandneigung und Stoßwinkel als für den ebenen Fall:

Für $Ma \gg 1$ und $Ma \sin \vartheta > 1$ gilt für den Druck am spitzen Kegel:

$$\frac{p_2}{(\rho_1/2)V_1^2} = \frac{2(\kappa + 1)(\kappa + 7)}{(\kappa + 3)^2} \sin^2 \vartheta \quad (7)$$

3. 5.3 Die einfachen lokalen Methoden und Vergleich mit Experimenten.

Sowohl das Newtonsche Modell als die Tangenten Keil und Kegelmethode geben für hypersonisch stumpfe Körper ($Ma \gg 1$, $Ma \sin \vartheta > 1$) den folgenden einfachen Zusammenhang zwischen lokalen Wanddruck und Neigung ϑ des Oberflächenelements.

$$\frac{p_w}{(\rho_1/2)V_1^2} = F_i(\kappa) \sin^2 \vartheta \quad (8)$$

Die Methoden können deshalb unter dem Sammelbegriff ‚lokale Neigungsmethoden‘ zusammengefasst werden (englisch: local inclination methods):

Mit dem Vorfaktor $F_i(\kappa)$ kann die Methode an verschiedene Strömungsfälle angepasst werden. In der folgenden Tabelle sind die Formel für die Vorfaktoren der der Neigungsmethoden zusammengefasst und für $\kappa = 1,4$ und 1 ausgewertet.

Für $\kappa = 1$ nehmen alle Faktoren den Wert 2 des einfachen Newtonschen Modells an. Für $\kappa = 1$ ergibt sich gasdynamisch, dass der Stoßwinkel gleich den Umlenkwinkel ist. Die Dichte des Gases hinter dem Stoß wird unendlich hoch. Der Stoß liegt direkt am Körper und entspricht deshalb dem Newtonschen Strömungsmodell.

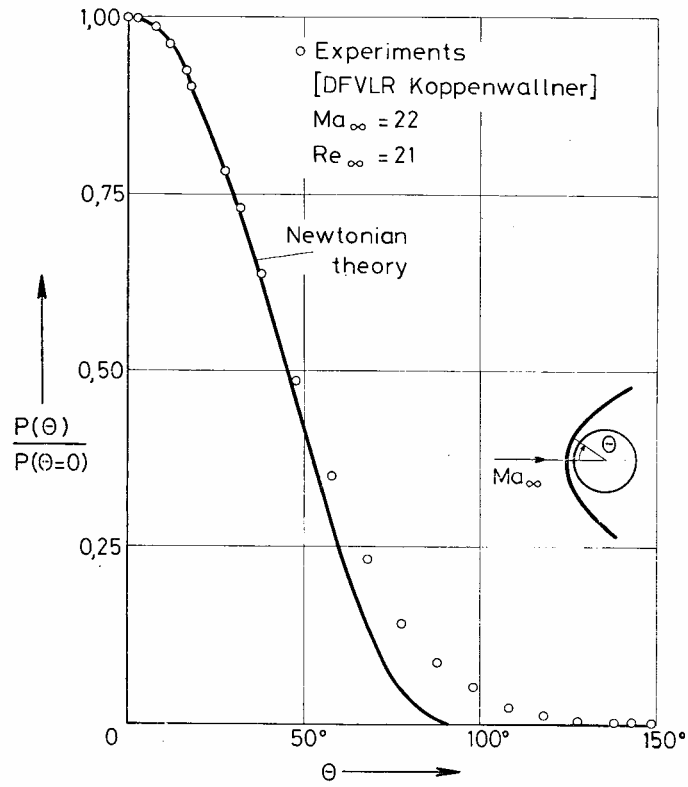
Table 1 Lokale Neigungsmethoden und Vorfaktoren im $\sin^2\theta$ Ansatz

Lokale Neigungsmethode	Vorfaktor in lokaler Neigungsmethode	Wert für $\kappa = 1,4$	Wert für $\kappa = 1,0$
Einfacher Newton	$F_i(\kappa) = 2$	2	2
Modifizierter Newton Stumpfe Körper	$F_i(\kappa) = \frac{(\kappa + 3)}{(\kappa + 1)}$	1,833	2
Tangenten Keil 2 dim. anliegender Stoß	$F_i(\kappa) = \kappa + 1$	2,4	2
Tangenten Kegel rot sym. Anliegender Stoß	$F_i(\kappa) = \frac{2(\kappa + 1)(\kappa + 7)}{(\kappa + 3)^2}$	2,083	2

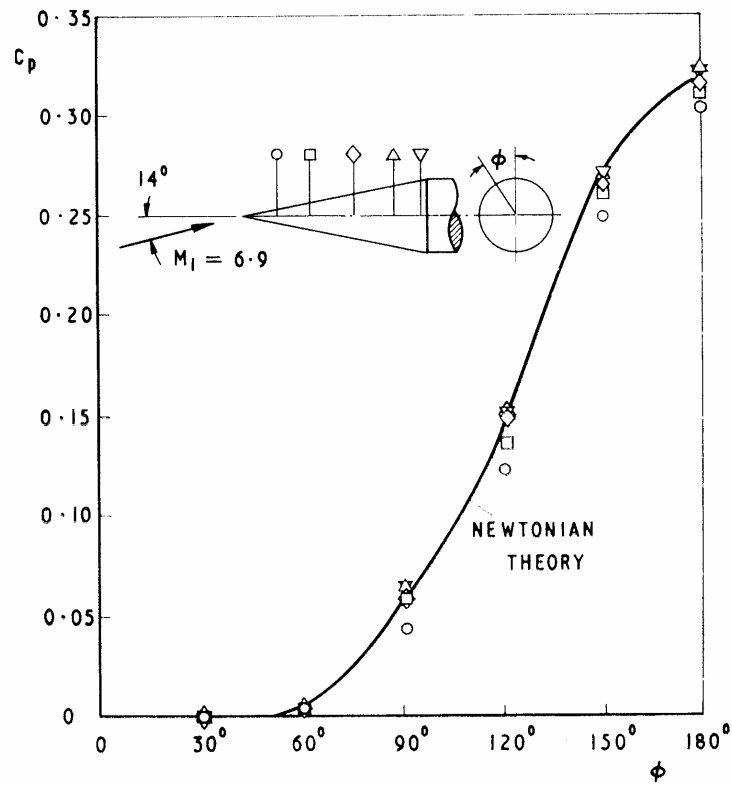
Die folgenden 2 Bilder zeigen einen Vergleich zwischen gemessener und Newtonscher Druckverteilung. Das erste Bild zeigt die mit dem Staupunktswert normierte Verteilung an einem quer angeströmten Zylinder. Abweichungen treten an schwach geneigten Oberflächenelementen auf.

Im 2. Fall wurde ein spitzer Kegel mit Anstellung und anliegenden Stoß gewählt.

Verglichen wird die Druckverteilung längs des Umfangs an verschiedenen Abstandspositionen von der Kegelspitze. Auch hier ist eine relativ gute Übereinstimmung mit dem Newton-Verfahren und den Messungen zu erkennen.



Pressure distribution on a circular cylinder and Newtonian theory



Druckverteilung über den Umfang am angestellten spitzenKegel
 Vergleich Messung mit Newton'scher Theorie
 McClellan, J. Aero. Sci. 18, pp. 641-648, 1951

3.5.4 Integrale Kraftbeiwerte und Newton'sche Druckverteilung

Bei reibungsfreier Strömung ergeben sich die Kraftbeiwerte aus Integralen der Druckverteilung über die Körperoberfläche. Für den Beiwertvektor $C_{\vec{F}}(c_x, c_y, c_z)$ im körperfesten Koordinatensystem gilt:

$$C_{\vec{F}} = \frac{1}{A_{ref}} \int_S cp \vec{n} dS$$

Die Flächennormale im Oberflächenelement dS des Körpers wird durch den Einheitsvektor \vec{n} beschrieben.

Für den lokalen Druckbeiwert gilt nach dem Newtonschen Modell.

$$cp = k_N \cos^2 \theta \quad (\text{Flächenelement fixiertes Koordinatensystem})$$

Hierbei ist θ der Winkel zwischen Flächennormale und dem Vektor der Anströmung. In Vektorschreibweise ergibt sich der lokale Druckbeiwert für das körperfeste Bezugssystem wie folgt:

$$cp = k_N (v_x \vec{n})^2 \quad (\text{Körperfeste Koordinatensystem}) \quad (10)$$

Hierbei ist v_x die x Komponente des Einheitsvektors der Anströmung $\vec{V}/V(v_x, v_y, v_z)$ im körperfesten Koordinatensystem. Damit ergibt sich für den Kraftbeiwertvektor

$$C_{\vec{F}}(c_x, c_y, c_z) = \frac{k_N}{A_{ref}} \int_S (v_x \vec{n})^2 \vec{n} dS \quad (11)$$

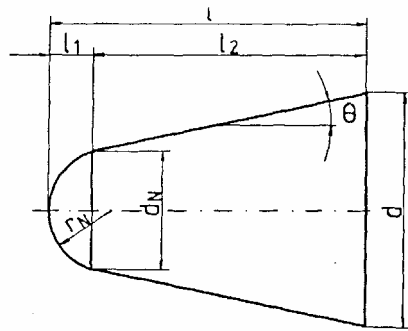
Diese Formel zeigt, dass sich die Kraftbeiwerte als Oberflächenintegral von geometrischen Körperdaten und der relativen Lage des Körpers zur Anströmung ergeben. Der eigentliche aerodynamische Ansatz liegt im Newtonfaktor k_N und steht vor dem Integral.

Eine analytische Lösung dieses Integrals ist nur für einfache achsensymmetrische Körperformen wie Kugel, Zylinder, Kegel und deren Kombination möglich, die im Folgenden kurz behandelt wird. Wir betrachten zunächst den Fall bei Anstellwinkel $\alpha=0$. Dimensionsbetrachtung zeigt, dass das Integral in Gleichung 11 eine Fläche ergibt, die von der Körperform abhängt. Wir definieren den Wert dieses Integrals bei $\alpha=0^\circ$ als den Formparameter eines Körpers:

$$\text{Formparameter } C_{Form} \text{ bei Anstellwinkel } \alpha = 0: C_{Form} = \frac{1}{A_{ref}} \int_S (v_x \vec{n})^2 \vec{n} dS \quad (12)$$

Achsensymmetrische Körperklassen

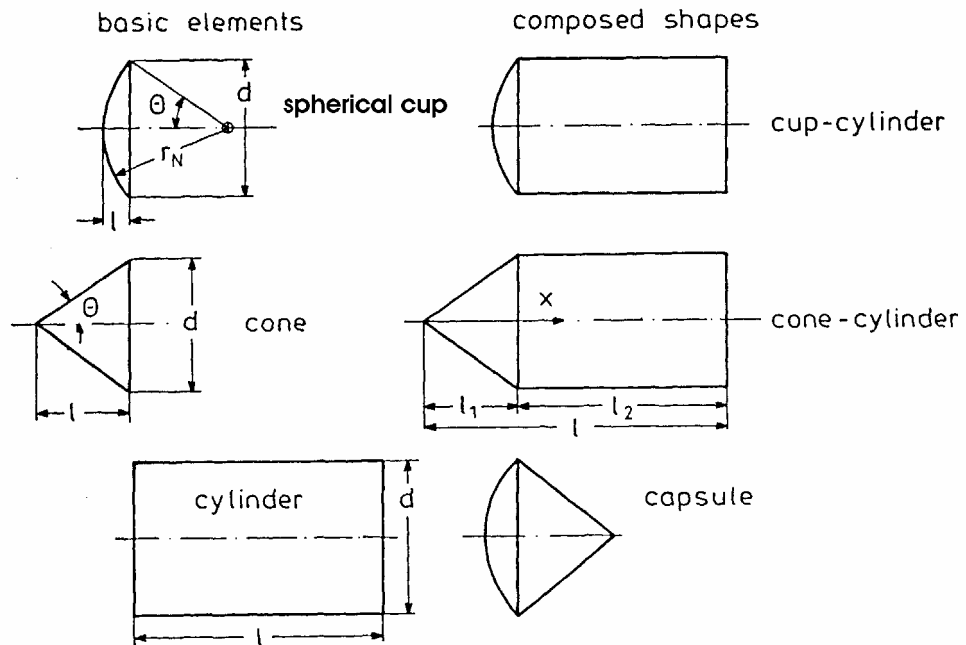
Die betrachteten Körperklassen sind im folgenden Bild zusammengestellt



- d Basisdurchmesser
- d_N Nasendurchmesser
- r_N Nasenradius
- θ Kegelhalbwinkel
- ~~d_N/d~~ Stumpfheit

$$\frac{r_N}{d} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{d_N}{d}$$

Bezugsfläche $A_{ref} = \text{Basisfläche}$



Achsensymmetrische Körperklassen die mit Newtonschen Druckansatz und Pike'schen Verfahren Behandelt werden können.

Als Bezugsfläche A_{ref} bei der Bestimmung von C_{Form} wird die Basisfläche des Körpers also $A_{ref} = (\pi/4)d^2$ gewählt.

Aerodynamische Beiwerte bei Anstellwinkel $\alpha = 0^\circ$

$$c_W(\alpha = 0^\circ) = C_F k_N;$$

$$c_A(\alpha = 0^\circ) = 0 \quad (\text{kein Auftrieb da Körper achsensymmetrisch})$$

Formeln für den Formparameter C_F

Scheibe $C_F = 1$

Kugel $C_F = 0,5$

Zylindrische Schale $C_F = 0$

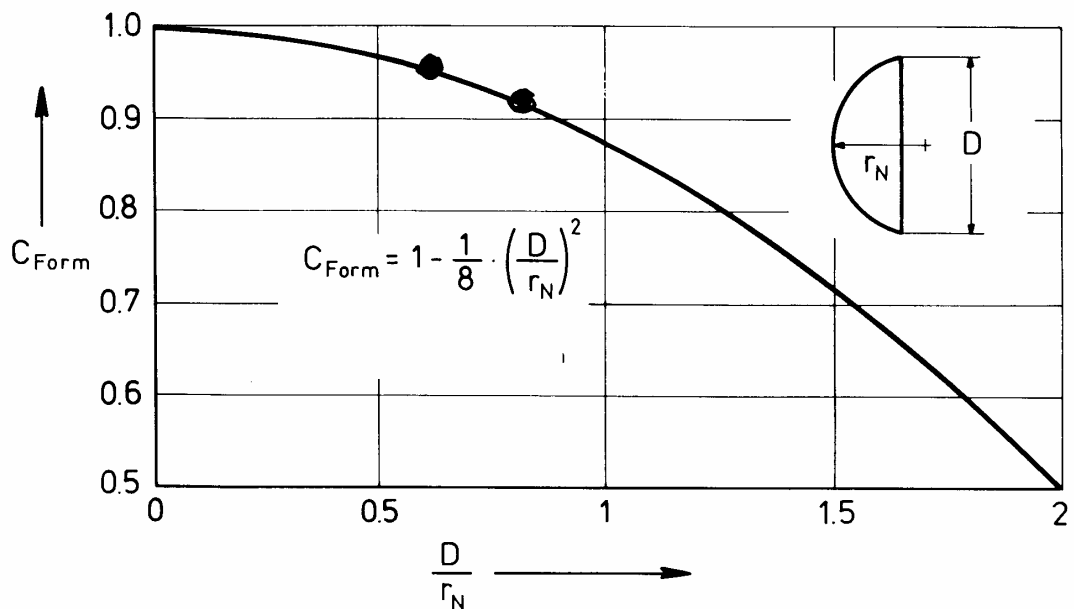
Spitzer Kegel $C_F = \sin^2 \theta$

Sphärische Kappe $C_F = 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{d}{r_N}\right)^2$

Kegel mit Nasenradius: $C_F = \left(1 - \frac{1}{8} \left(\frac{d}{r_N}\right)^2\right) \left(\frac{d}{r_N}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(1 - \left(\frac{d}{r_N}\right)^2\right)$

Zylinder (quer angeströmt) $C_F = 2/3$

Das folgende Bild zeigt den Formfaktor einer sphärischen Kappe als Funktion von D/r_N . Die Punkte repräsentieren Werte der Gemini und Apollokapsel-



Für die behandelten Körperklasse hat Pike hat gezeigt, dass der Auftrieb und Widerstand bei Anstellung α in einer universellen Weise mit dem Widerstandsbeiwert $c_W(\alpha = 0)$ und damit mit dem Formparameter C_F verbunden ist. Es gelten die folgenden Beziehungen

Formeln für Widerstand und Auftrieb bei Anstellwinkel

$$c_W = \frac{k_N}{2} [2C_F - (5C_F - 3)\sin^2 \alpha] \cos \alpha$$

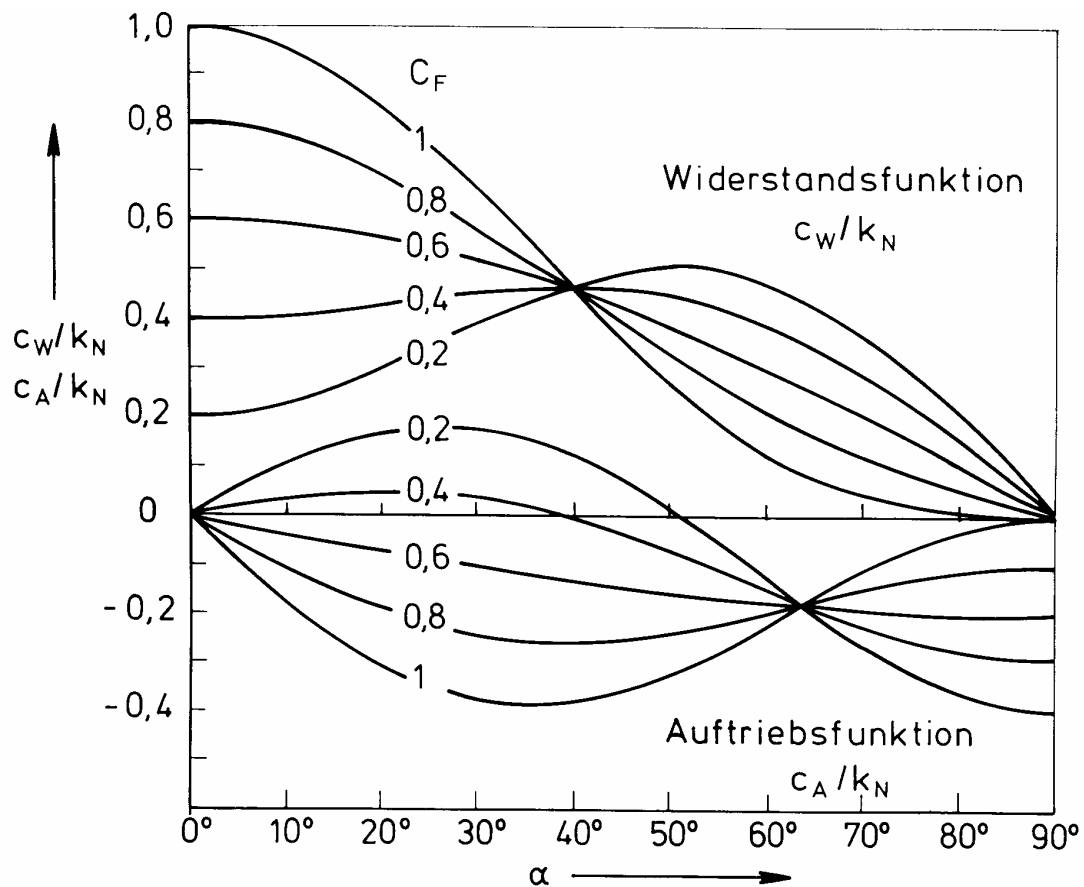
$$c_A = \frac{k_N}{2} [2(1 - 2C_F) - (5C_F - 3)\sin^2 \alpha] \sin \alpha$$

Gültigkeit: $\alpha < \alpha_{\max}$; ab α_{\max} nimmt benetzte Fläche ab.

Steigung der Auftriebskurve bei $\alpha = 0^\circ$.

$C_F < 0,5$	$dc_A/d\alpha$	positiv	Körper schlank
$C_F > 0,5$	$dc_A/d\alpha$	negativ	Körper stumpf.

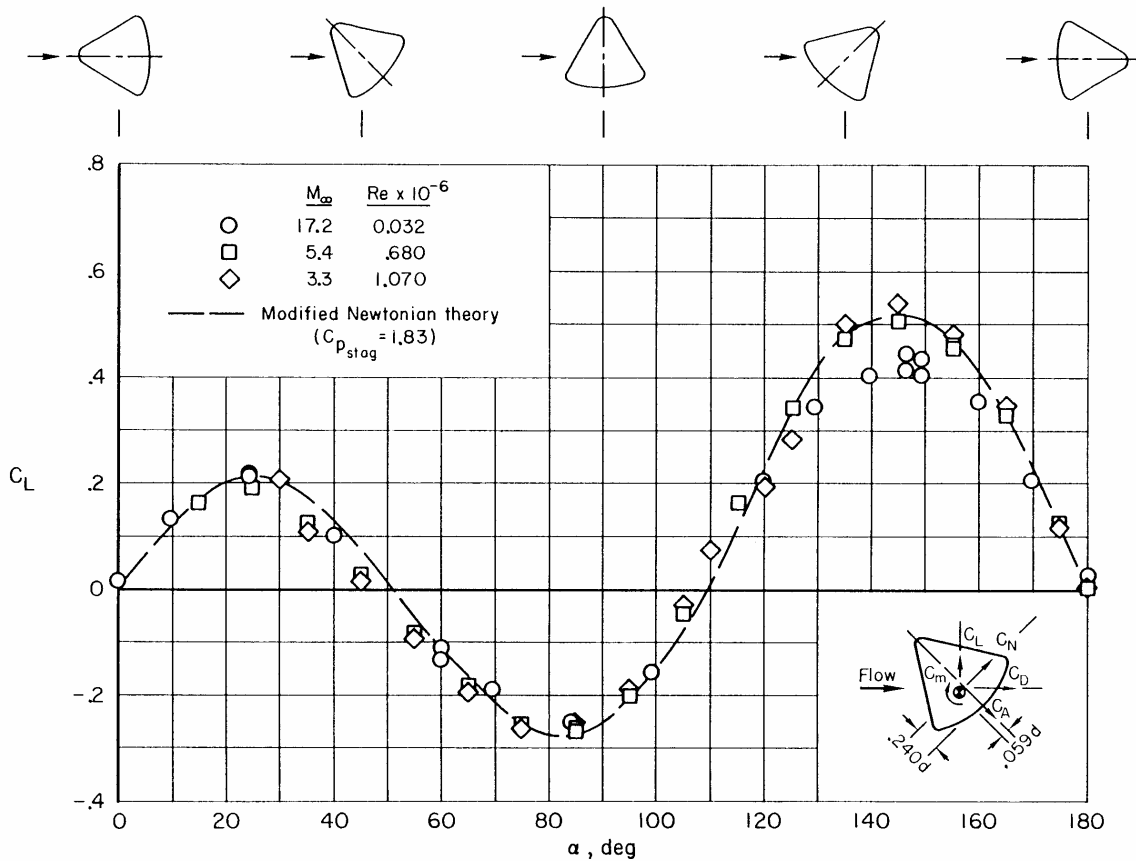
Das folgende Bild zeigt die Auftragung der Widerstands und Auftriebsfunktionen.



**Widerstands und Auftriebsfunktion mit Newton'schen Druckansatz für achsensymmetrische Körper nach Pike'schen Verfahren.
(Gültigkeit: Anstellwinkelbereich mit identisch benetzter Fläche)**

Das nächste Bild zeigt an anhand der Apollo Kapsel die gute Übereinstimmung zwischen Newtonverfahren und den experimentellen Messungen

Zu beachten ist, dass für die sehr stumpfe Apollo Kapsel die Unabhängigkeit der Beiwerte von Ma bereits bei Ma ~ 4 einsetzt.



Apollo Auftriebsbeiwert CL als Funktion von Alpha

NACA TM- X-1103

Empfohlenes Schrifttum

Bertin J.J.
Hypersonic Aerothermodynamics
AIAA, Washington 1994

Liepman H.W. , Rhosko A.
Elements of Gasdynamics
John Wiley,

*Allen.H. J.; Eggers,jr. A. J.
A Study of the Motion and Aerodynamic Heating of Missiles Entering the Earth's At-
mosphere at High Supersonic Speeds
NACA TN- 4047, Washington USA, 1957

Anderson J. D.
Hypersonics and High Temperature Gas Dynamics
Mc Graw Hill , New York

Anderson J. D.
Modern Compressible Flow, with Historical Perspective
Mc Graw Hill , New York

*Chapman D.R.
An Approximate Analytical Method for Studying Entry into Planetary Atmospheres
NACA TN 4296 ,NACA 1958, NASA TR 11, 159

*Anonym
Equations Tables and Charts for Compressible Flow
NACA Report 1135, 1953

Pike J.
Moments and Forces on General Convex Bodies in Hypersonic Flow
AIAA Journal Vol.12. No9 1974 pp. 1241-1247

* Downlaod über NASA Internet möglich