

### 3. Die reibungsfreie hypersonische Kontinuumsströmung

Die wichtigste Kennzahl der reibungsfreien hypersonischen Strömung ist die Machzahl  $Ma$ . Es ist deshalb angebracht kurz die physikalische Bedeutung der Machzahl darzulegen.

#### 3.1 Physikalische Bedeutung und Interpretation der Machzahl

Definition der Machzahl  $Ma = V/a$

##### a. Die Machzahl als Ähnlichkeitsparameter

Die aerodynamischen Beiwerte  $C_{xi}$  sind in diesem Fall nur eine Funktion von Flugmachzahl, Körperform und Fluglage also:

$$C_{xi} = \text{Funktion}(Ma, \text{Körperform}, \text{Fluglage})$$

Um geometrisch ähnliche Körper ist das Stromlinienfeld bei identischer Machzahl-ähnlich.

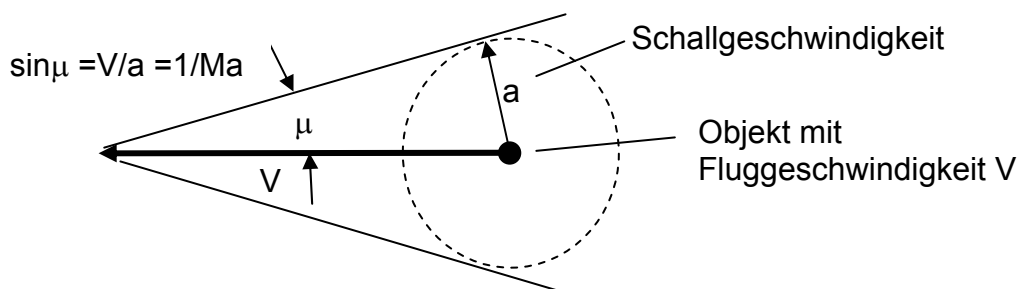
Die aerodynamischen Beiwerte sind für geometrisch ähnliche Körper bei gleicher Anströmmachzahl identisch. Dies alles sind typische Charakteristika der Machschen Ähnlichkeit.

##### b. Die Machzahl und Machwinkel als Maß für die Ausbreitung von schwachen Störungen

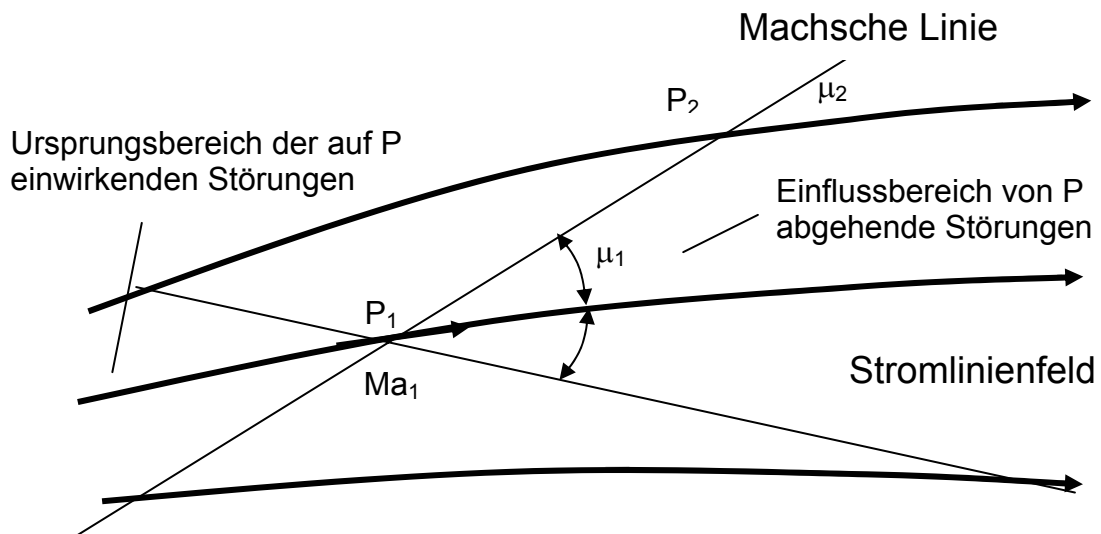
Wir betrachten einen Körper, der sich mit der Geschwindigkeit  $V > a$  durch die Luft bewegt wobei sich die verursachte Störung mit Schallgeschwindigkeit  $a$  ausbreitet und erhalten so die Definition des Machwinkels  $\mu$

$$\text{Machzahl } Ma = \frac{V}{a}; \quad \text{Machwinkel: } \sin \mu = \frac{a}{V} = \frac{1}{Ma}$$

Definition des Machwinkels am Beispiel bewegter Körper



## Ausbreitung von Störung im Überschallströmungsfeld



Im Punkt 1 verursachte Störungen, breiten sich stromab innerhalb des Machwinkel Bereichs  $+\mu_1$  und  $-\mu_1$  aus.

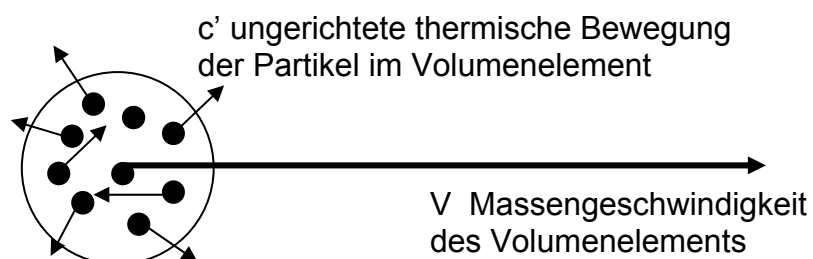
Auf den Punkt P1 können nur Störungen aus dem komplementären Machwinkelbereich 1 einwirken.

Für  $Ma \gg 1$  ergibt ein sehr kleiner Machwinkel, d.h. die Störungen können sich nur in einem sehr engen Winkelbereich ausbreiten. Für  $Ma = \infty$  wird der Machwinkel  $\mu = 0$ , dies heißt die Störungen bleiben auf die Stromröhre begrenzt.

### c. Machzahl als Maß für die Richtung der Partikelbewegung.

Wir benutzen die folgende Modelvorstellung.

Ein Volumenelement bewegt sich mit der Massegeschwindigkeit  $V$ . Die Moleküle innerhalb des Volumenelements bewegen sich mit der wahrscheinlichsten thermischen Geschwindigkeit  $c'$  relativ zum Volumenelement. Der  $c'$  Vektor ist in alle Richtungen gleichmässig verteilt (keine Vorzugsrichtung).



Wir bilden das folgende Geschwindigkeitsverhältnis.

$$\frac{\text{Gerichtete.Massengeschwindigkeit}}{\text{ungerichtete.thermische.Geschwindigkeit}} = \frac{V}{c'} = \frac{V}{a} \frac{a}{c'} = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} Ma$$

Für  $Ma \gg 1$  ergibt sich eine Partikelbewegung mit einheitlicher Richtung zur Massengeschwindigkeit.

#### **d. Machzahl als Maß für das Verhältnis von dynamischen zu statischen Größen der Strömung.**

Anwendung auf Druck:

Wir betrachten das Verhältnis von dynamischen zum statischen Druck der Strömung.

$$\frac{\text{Dynamischer Druck}}{\text{Statischer Druck}} = \frac{q}{p} = \frac{(1/2)\rho V^2}{p};$$

Wir benutzen:  $p = \rho RT$  und  $a = \sqrt{\kappa RT}$  und erhalten:  $\frac{q}{p} = \frac{1}{2} \frac{\rho V^2}{\rho RT} = \frac{\kappa}{2} Ma^2$

Hyperschall mit  $Ma \gg 1$  bedeutet: Der dynamische Druck der Strömung ist wesentlich höher als der statische.

Unterschall mit  $Ma \ll 1$  bedeutet: Der statische Druck ist wesentlich höher als der dynamische Druck.

$$\text{Bernoulligleichung im Unterschall } Ma \ll 1 : p_g = p_{stat} + \frac{1}{2} \rho V^2; \quad \frac{p_g}{p_{stat}} = 1 + \frac{\kappa}{2} Ma^2$$

Anwendung auf Energie:

Wir unterscheiden zwischen kinetischer Energie und statischer thermischer Energie pro Masseinheit:

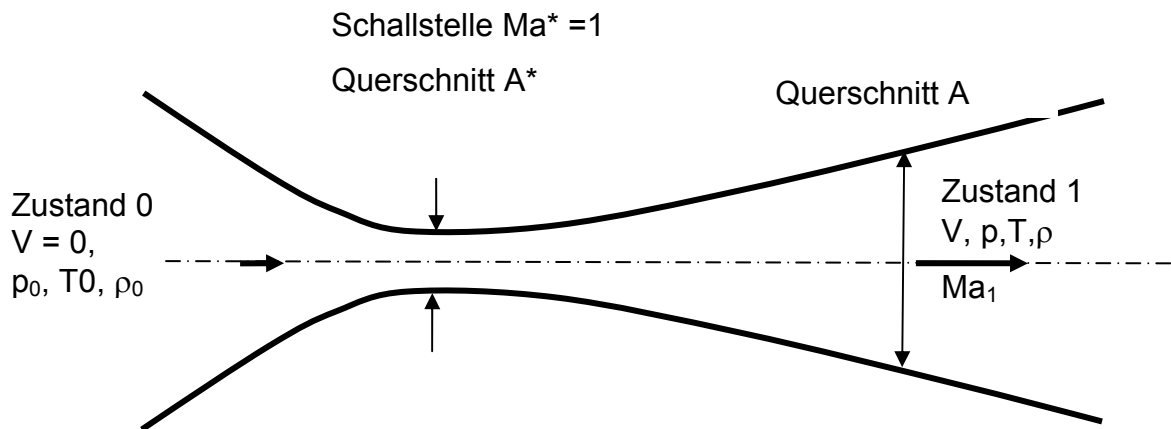
Wir benutzen:  $c_p - c_v = R$ ,  $c_p/c_v = \kappa$ ; ergibt:  $1 - 1/\kappa = R/c_p$  bzw:  $c_p = R\kappa/(\kappa - 1)$

$$\frac{\text{kin.Energie}}{\text{Stat.thermische.Energie}} = \frac{(1/2)V^2}{c_p T} = \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2$$

$Ma \gg 1$  bedeutet: Kinetische Strömungsenergie ist wesentlich grösser als thermische Energie.

$Ma \ll 1$  bedeutet: Kinetische Strömungsenergie gegenüber der thermischen Energie vernachlässigbar.

### 3.2 Die eindimensionale isentrope Expansionsströmung



Wir benützen folgende Gleichungen

Zustandsgleichung:  $p = \rho RT$ , (1)

Energiesatz:  $cpdT + VdV = 0$  (2)

Impulssatz:  $dp + \rho VdV = 0$  (3)

Elimination von  $VdV$  aus Impuls und Energiesatz ergibt für Druck und Temperatur:

$dp = \rho c_p dT$  mit  $\rho = p/(RT)$  und  $\frac{c_p}{R} = \frac{\kappa}{\kappa - 1}$  folgt weiter

$$\frac{dp}{p} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{dT}{T} \quad \text{und} \quad \frac{dp}{p} = \kappa \frac{d\rho}{\rho} \quad (4)$$

Integration von Anfangszustand 0 mit  $V_0 = 0, p_0, T_0$  bis Zustand  $V, p, T$ :

Energiesatz:  $cpT_0 = cpT + (1/2)V^2$  (5)

Druck-Temperatur :  $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{(\kappa-1)/\kappa} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\kappa$  (6)

Durch weitere Umformung können folgende normierte Beziehungen abgeleitet werden:

Wir normieren den Energiesatz mit  $cpT_1$  und erhalten aufgelöst nach  $T_1/T_0$

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{-1} \quad (7)$$

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{-\kappa/(\kappa-1)} \quad (8)$$

$$\frac{q}{p_0} = \frac{\kappa}{2} Ma^2 \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{-\kappa/(\kappa-1)} \quad (9)$$

$$\left(\frac{V}{a_0}\right)^2 = Ma^2 \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{-1} \text{ mit } a_0 = \sqrt{\kappa RT_0} \quad (10)$$

$$\text{für } Ma \gg 1 \text{ folgt } \frac{V_{\max}}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}} \quad (11)$$

Stromröhrenfläche und Geschwindigkeit

$$\text{Kontinuitätsgleichung: } \rho VA = m'; \quad \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (12)$$

$$\text{Aus } \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\kappa - 1} \frac{dT}{T} \text{ und } VdV = -cpdT \text{ folgt } \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{VdV}{\kappa RT} \quad (13)$$

$$\text{Eingesetzt in 12 ergibt sich: } \frac{dA}{A} = \frac{VdV}{\kappa RT} - \frac{dV}{V} = \left(\frac{V^2}{\kappa RT} - 1\right) \frac{dV}{V}$$

$$\frac{dA}{A} = (Ma^2 - 1) \frac{dV}{V} \quad (14)$$

Diese Gleichung zeigt:

Für  $Ma < 1$  Beschleunigung  $+dV/V$  benötigt Flächenabnahme  $-dA/A$

Für  $Ma > 1$  Beschleunigung  $+dV/V$  benötigt Flächenzunahme  $+dA/A$

Flächenverhältnis der Stromröhre:

$$\frac{A}{A^*} = \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} \frac{1}{Ma} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}; \quad (15)$$

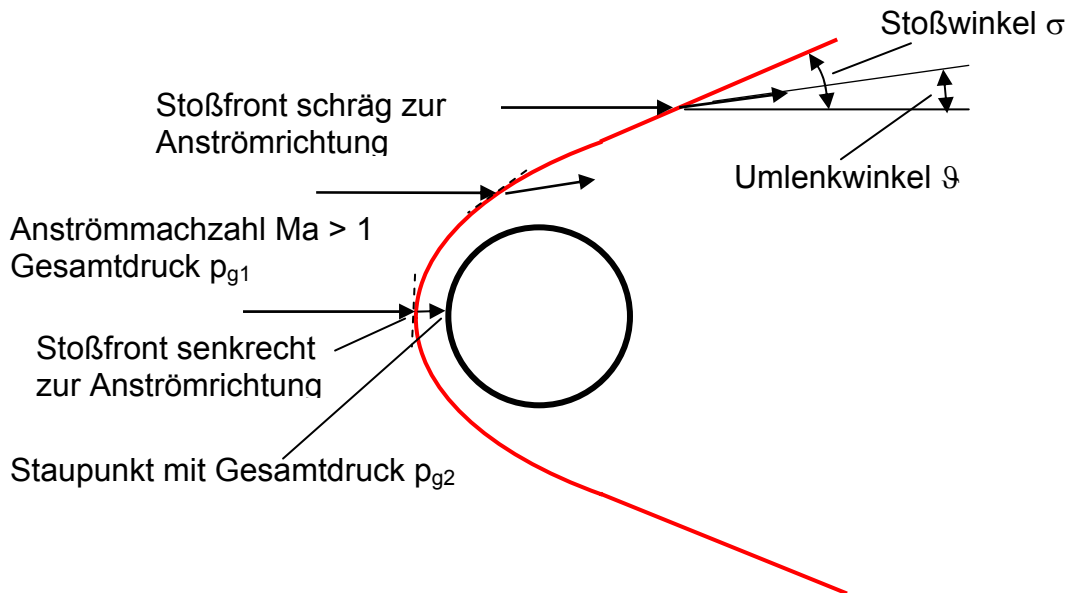
für  $Ma = 1$  wird  $A/A^* = 1$

### 3.3 Der senkrechte und schräge Verdichtungsstoß

Die Verzögerung einer Überschallströmung durch ein Hindernis verursacht Kompressionswellen aus denen sich Verdichtungsstöße mit sprunghafter Zustandsänderung ergeben. Experimentell wurden diese Verdichtungsstöße zunächst von Ernst Mach an Geschossen nachgewiesen.

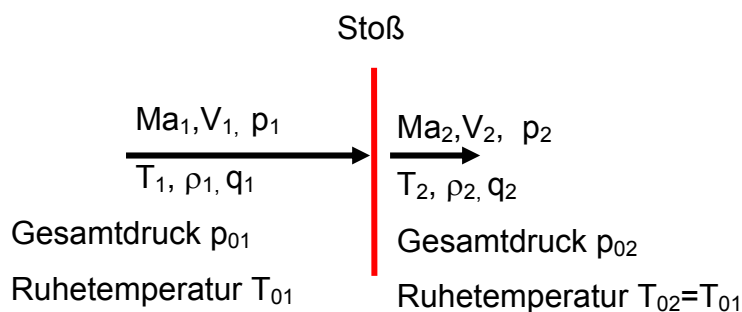
Man unterscheidet zwischen dem senkrechten und den schrägen Verdichtungsstößen, die in ihrer Gesamtheit vor einem stumpfen Körper als gekrümmte Stoßfront zu beobachten sind. Gemessen mit einem makroskopischen Maßstab (z.B Körperlänge

L) sind Verdichtungsstöße unendlich dünn. Misst man mit einem mikroskopischen Maßstab z. B. mittlere freie Weglänge  $\lambda$  so stellt man eine Stoßdicke von  $\delta_s \approx 6\lambda$  fest. Die sprunghaften Zustandsänderungen über den Verdichtungsstößen sind nicht isentrop. Über Verdichtungsstöße gelten die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie.



### 3.3.1 Der senkrechte Verdichtungsstoß

Die Stoßfront steht senkrecht zur Anströmrichtung. Der Stoßwinkel  $\sigma$  beträgt  $90^\circ$  und die Strömungsrichtung bleibt über dem Stoß erhalten.



Erhaltungssätze:

Masse  $V_1 \rho_1 = V_2 \rho_2$  (1)

Impuls  $p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2$  (2)

Energie  $c_p T_1 + \frac{1}{2} V_1^2 = c_p T_2 + \frac{1}{2} V_2^2 = c_p T_0$  (3)

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert für Zustandsänderungen über dem Stoß:

Formel

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa Ma_1^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(2\kappa Ma_1^2 - (\kappa - 1))((\kappa - 1)Ma_1^2 + 2)}{(\kappa + 1)^2 Ma_1^2}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{(\kappa + 1)Ma_1^2}{(\kappa - 1)Ma_1^2 + 2}$$

$$Ma_2 = \sqrt{\frac{(\kappa - 1)Ma_1^2 + 2}{2\kappa Ma_1^2 - (\kappa - 1)}} \quad ; \quad Ma_2 < 1$$

Grenzwerte für  $Ma \gg 1$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} Ma_1^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{p_2}{q_1} = \frac{4}{\kappa + 1} \quad (4)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\kappa(\kappa - 1)}{(\kappa + 1)^2} Ma_1^2 \quad (5)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa + 1)}{(\kappa - 1)} \quad (6)$$

$$Ma_2 = \sqrt{\frac{(\kappa - 1)}{2\kappa}} \quad (7)$$

Verhältnis der Gesamtdrücke:

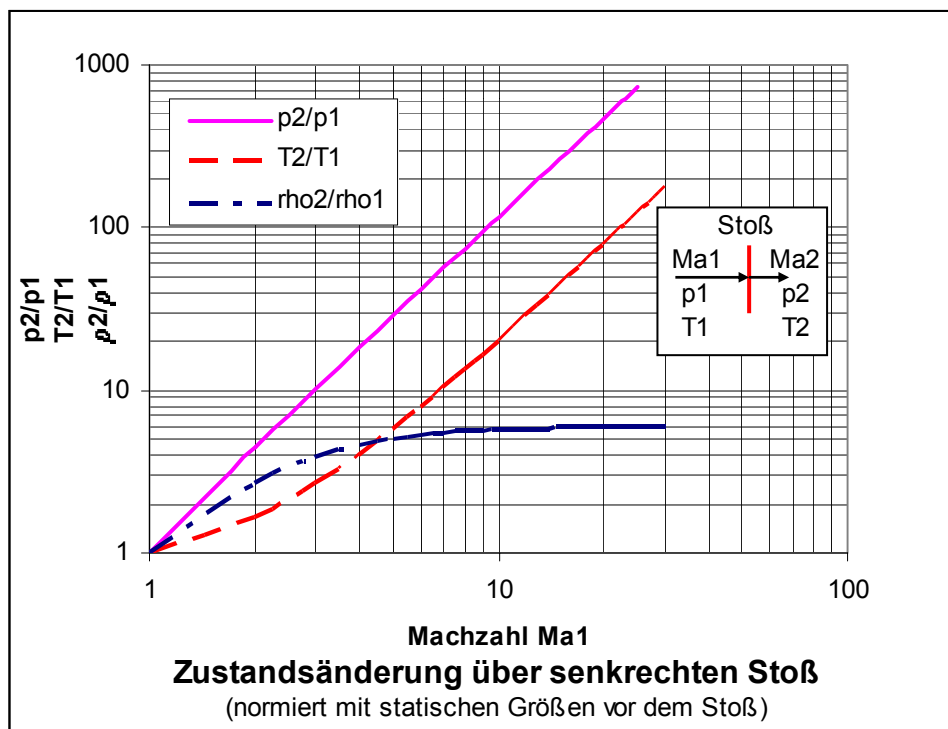
$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left( \frac{(\kappa + 1)Ma_1^2}{(\kappa - 1)Ma_1^2 + 2} \right)^{\kappa/(\kappa - 1)} \left( \frac{\kappa + 1}{2\kappa Ma_1^2 - (\kappa - 1)} \right)^{1/(\kappa - 1)} \quad ; \quad s_2 - s_1 = R \ln \frac{p_{01}}{p_{02}} \quad (8)$$

Verhältnis der Ruhetemperaturen:

Es erfolgt kein Wärmeaustausch mit Umgebung deshalb gilt  $T_{02}/T_{01} = 1$  (9)

Raleigh- Pitot Formel für den Aufstau über senkrechten Stoß

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \left( \frac{(\kappa + 1)Ma_1^2}{2} \right)^{\kappa/(\kappa - 1)} \left( \frac{\kappa + 1}{2\kappa Ma_1^2 - (\kappa - 1)} \right)^{1/(\kappa - 1)} \quad V_{lr}$$



Wir beziehen die Zustandsgrößen hinter dem Stoß auf dynamische Größen der Anströmung und erhalten Ausdrücke, die für  $Ma \gg 1$  Grenzwerte annehmen, die von der Machzahl unabhängig sind.

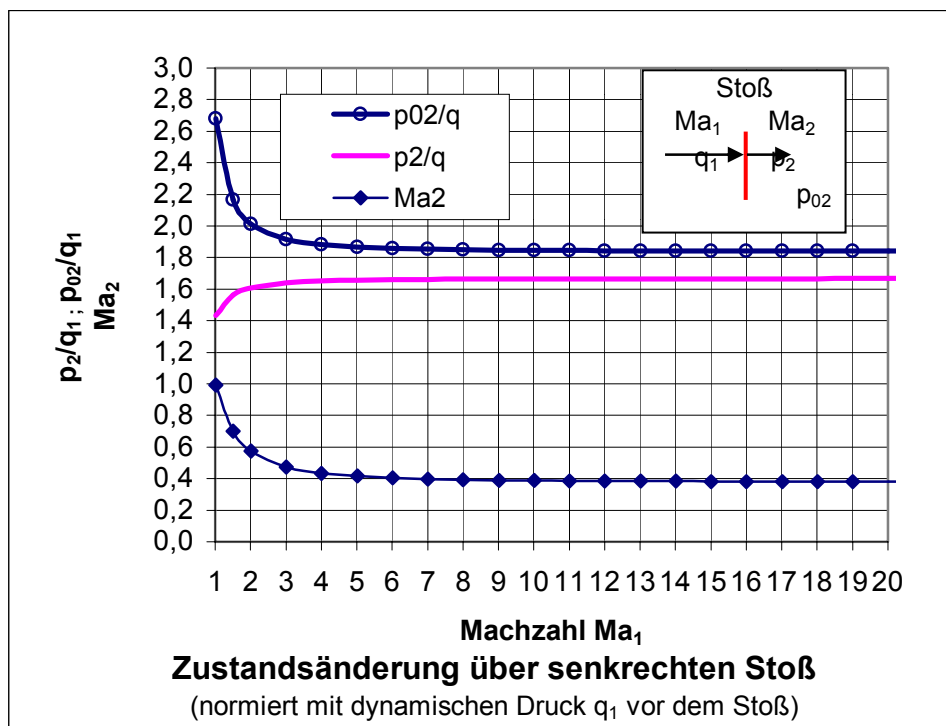
$$\frac{p_2}{q_1} = \frac{2\kappa Ma_1^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} \frac{2}{\kappa Ma_1^2} = \frac{4}{(\kappa + 1)} - \frac{(\kappa - 1)}{\kappa + 1} \frac{2}{\kappa Ma_1^2}; \quad \text{für } Ma \gg 1 \quad \frac{p_2}{q_1} = \frac{4}{(\kappa + 1)} \quad (11)$$

$$\frac{p_{02}}{q_1} = \left( \frac{(\kappa + 1) Ma_1^2}{2} \right)^{\kappa/(\kappa-1)} \left( \frac{\kappa + 1}{2\kappa Ma_1^2 - (\kappa - 1)} \right)^{1/(\kappa-1)} \left( \frac{2}{\kappa Ma_1^2} \right) \quad (12)$$

Der asymptotische Grenzwert von  $p_{02}/q$  für  $Ma_1 \gg 1$  kann vereinfacht wie folgt abgeleitet werden; da  $Ma_2$  hinter dem Stoß im Unterschall liegt setzen wir die inkompressible Bernoulligleichung an:  $p_{02} = p_2 + q_2$ .

$$\frac{p_{02}}{q_1} = \frac{p_2}{q_1} + \frac{q_2}{q_1} \quad \text{mit} \quad \frac{p_2}{q_1} = \frac{4}{(\kappa + 1)} \quad \text{und} \quad \frac{q_2}{q_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \quad \text{folgt:}$$

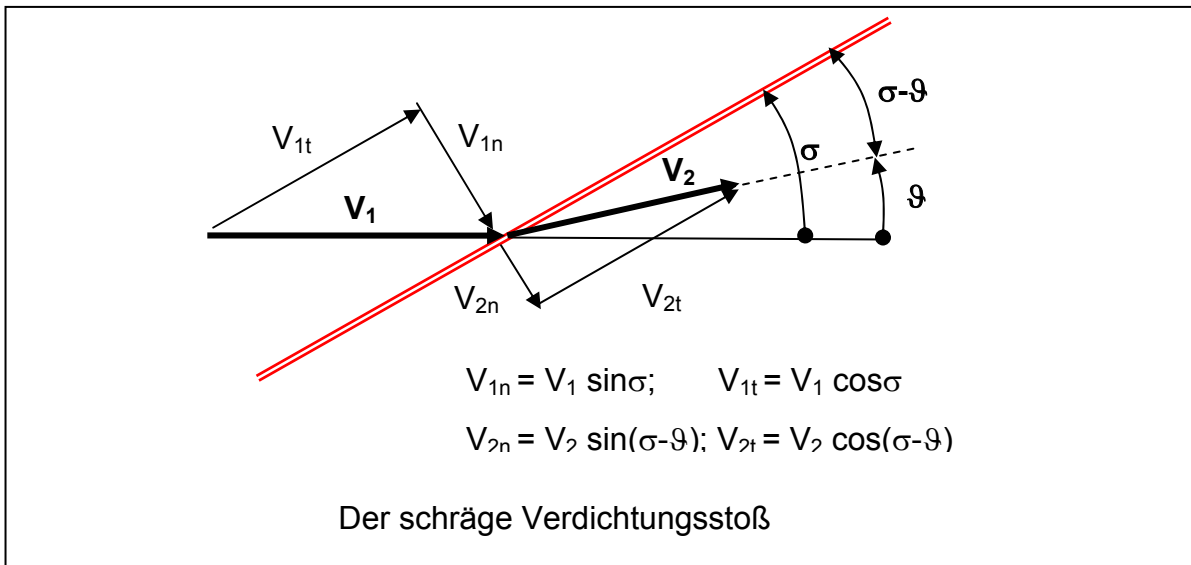
$$\frac{p_{02}}{q_1} = \frac{4}{(\kappa + 1)} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \quad \text{ergibt} \quad \frac{p_{02}}{q_1} = \frac{\kappa + 3}{\kappa + 1} \quad (13)$$



### 3.3.3 Der schräge Verdichtungsstoß

Beim schrägen Verdichtungsstoß ist die Stoßebene um den Stoßwinkel  $\sigma$  gegen die Anströmrichtung geneigt und die Strömung wird um den Winkel  $\vartheta$  abgelenkt

Die folgende Skizze erläutert die Änderung des Geschwindigkeitsvektors und seiner Komponenten relativ zur Stoßebene



Zur Berechnung der Zustände hinter dem Stoß benutzt man die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie.

Masse: 
$$V_{1n} \rho_1 = V_{2n} \rho_2 \quad (14)$$

Impuls senkrecht zum Stoß 
$$p_1 + \rho_1 V_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 V_{2n}^2 \quad (15)$$

Impuls parallel zum Stoß 
$$\rho_1 V_{1n} V_{1t} = \rho_2 V_{2n} V_{2t} \quad (16)$$

Energie 
$$c_p T_1 + \frac{1}{2} V_1^2 = c_p T_2 + \frac{1}{2} V_2^2 = c_p T_0 \quad (17)$$

Aus 14 und 16 folgt: 
$$V_{1t} = V_{2t} \text{ und } V_{1n} / \tan \sigma = V_{2n} / \tan(\sigma - \vartheta) \quad (18)$$

Dies heißt die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit bleibt über dem Stoß erhalten. Ausschlag gebend für die Zustandsänderung über dem Stoß ist daher die Normalkomponente  $V_{1n}$  der Geschwindigkeit zur Stoßfront. Die Auflösung des Gleichungssystems ist identisch zum senkrechten Stoß sofern nur die Normalkomponenten von Geschwindigkeit und Machzahl benutzt werden.

Für die Berechnung der Zustandsänderung über dem schrägen Stoß mit Machzahl  $Ma_1$  und Stoßwinkel  $\sigma$  gelten damit die Gleichungen des senkrechten Stoßes wobei  $Ma_1$  und  $Ma_2$  durch die Normalkomponenten beim schrägen Stoß zu ersetzen sind.

$$Ma_{1n} = Ma_1 \sin(\sigma); \quad Ma_{2n} = Ma_2 \cos(\sigma - \vartheta) \quad (19)$$

Für das Druckverhältnis  $p_2/p_1$  und das Dichteverhältnis  $\rho_2/\rho_1$  über einen schrägen Stoß ergibt sich beispielsweise:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa Ma_{1n}^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} \quad \text{mit } Ma_{1n} = Ma_1 \sin(\sigma) \quad (20)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{1n}}{V_{2n}} = \frac{(\kappa + 1)Ma_1^2 \sin^2 \sigma}{(\kappa - 1)Ma_1^2 \sin^2 \sigma + 2} \quad (21)$$

$$Ma_{2n}^2 = \frac{(\kappa - 1)Ma_{1n}^2 + 2}{2\kappa Ma_{1n}^2 - (\kappa - 1)} \quad (22)$$

### Die Beziehung zwischen Umlenkwinkel $\vartheta$ und Stoßwinkel $\sigma$

Noch nicht gelöst ist die Abhängigkeit des Stoßwinkels  $\sigma$  von Machzahl  $Ma_1$  und Umlenkwinkel  $\vartheta$ . Wir benutzen hierzu Gl. 21 für das Geschwindigkeitsverhältnis  $V_{1n}/V_{2n}$  und die Winkelbeziehung in Gleichung 18 und erhalten zunächst:

$$\frac{\tan(\sigma - \vartheta)}{\tan \sigma} = \left( \frac{(\kappa - 1)Ma_1^2 \sin^2 \sigma + 2}{(\kappa + 1)Ma_1^2 \sin^2 \sigma} \right) \quad (23a)$$

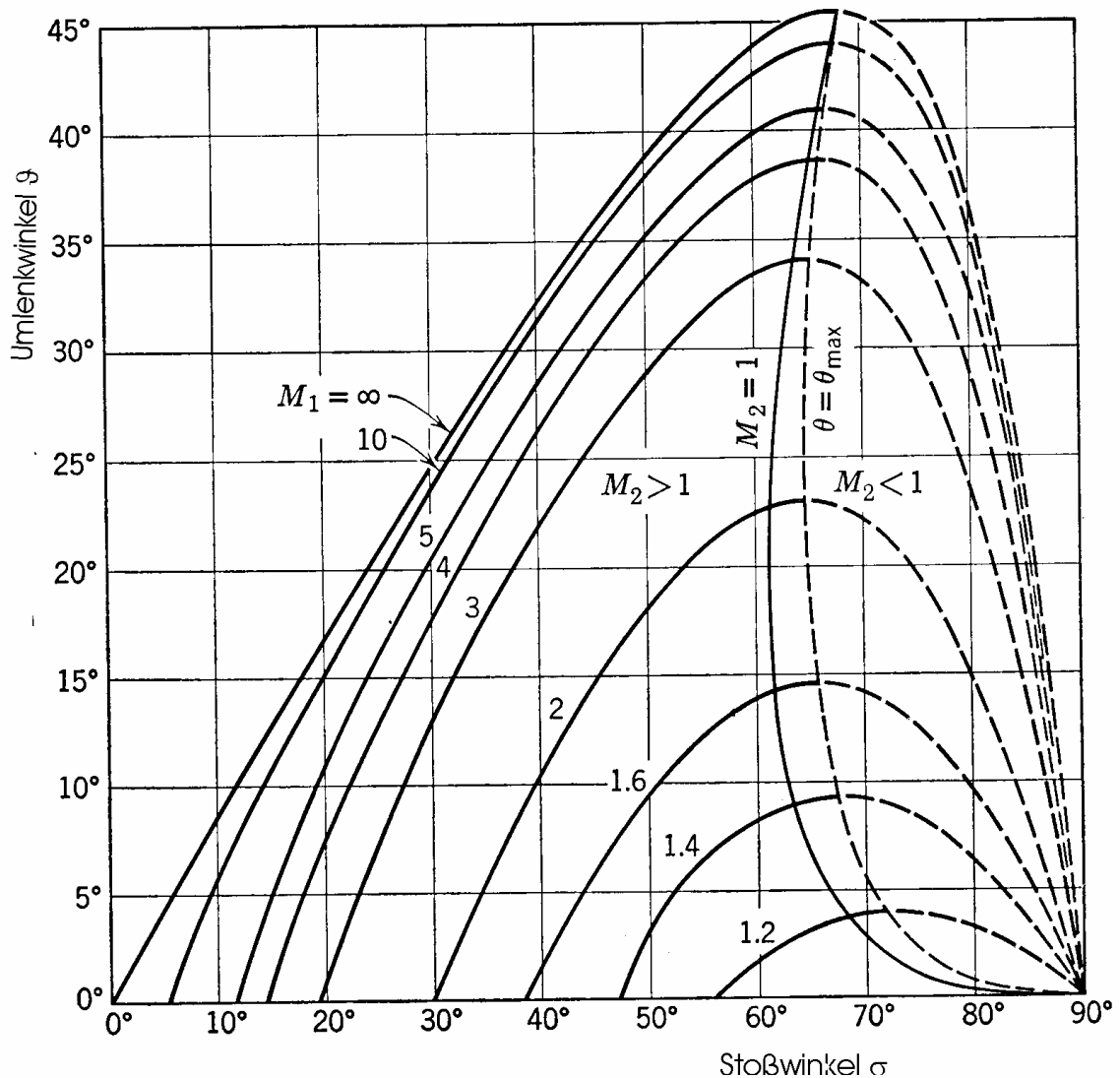
$$\sin^2 \sigma = \frac{1}{Ma^2} + \frac{\kappa + 1}{\kappa} \frac{\sin \sigma \sin \vartheta}{\cos(\sigma - \vartheta)} \quad (\text{alternative Beziehung}) \quad (23b)$$

Nach weiterer Umformung von 23a ergibt sich die  $\vartheta$ - $\sigma$ - Ma - Formel.

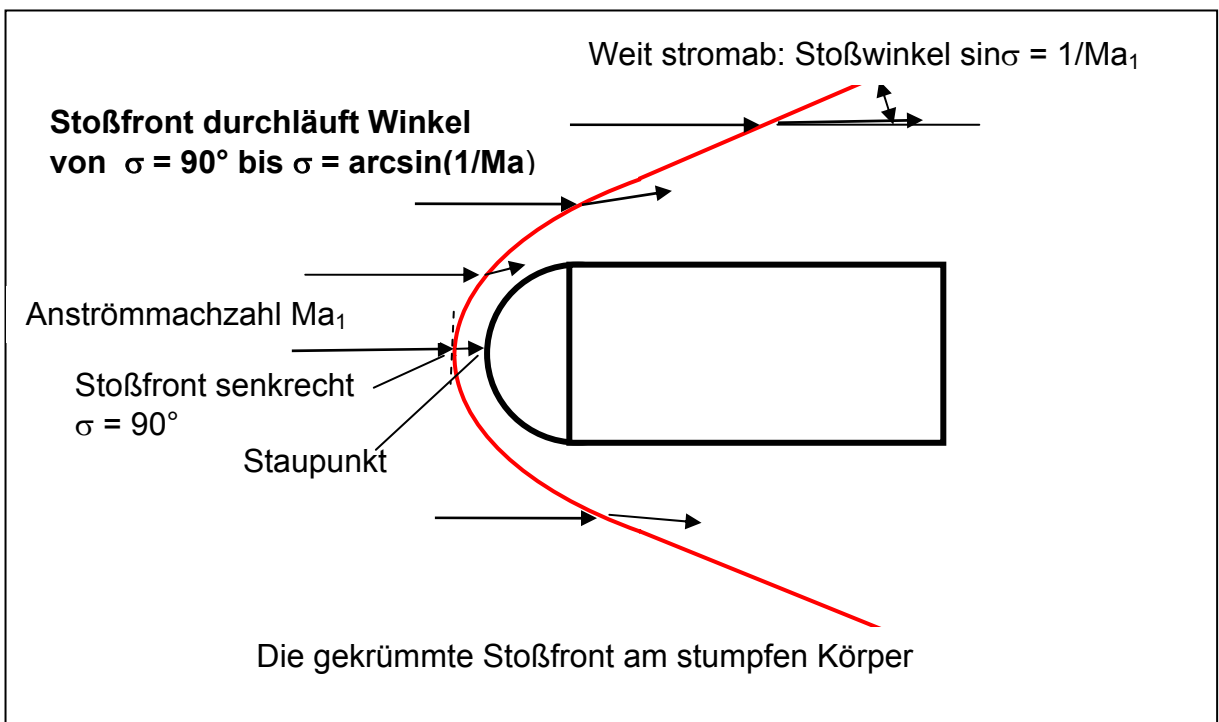
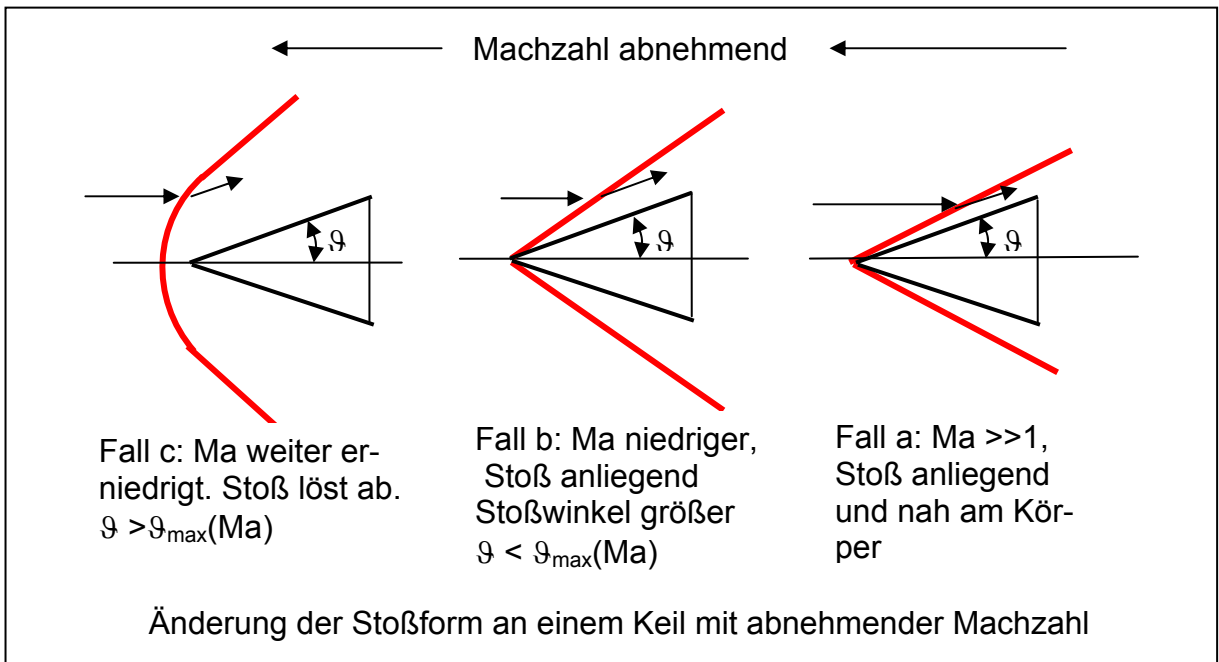
$$\tan \vartheta = 2 \cot \sigma \left( \frac{Ma_1^2 \sin^2 \sigma - 1}{Ma_1^2 (\kappa + \cos 2\sigma) + 2} \right) \quad (24)$$

Diese Formel erlaubt die Bestimmung des Umlenkwinkels bei vorgegebener Machzahl und vorgegebenen Stoßwinkel. Der Umlenkwinkel  $\vartheta$  nimmt für  $\cot \sigma = 0$  also für  $\sigma = \pi/2$  den Wert  $\vartheta = 0^\circ$  an, dies entspricht dem senkrechten Stoß. Außerdem ist eine Nullstelle für  $\sin \sigma = 1/Ma_1$  vorhanden, dies entspricht der Machwelle, die von einer parallel angeströmten Platte ausgeht.

Bei vorgegebenen Umlenkwinkel und Machzahl kann der wichtige Stoßwinkel nur durch Iteration gefunden werden. Das folgende zeigt Bild zeigt den Umlenkwinkel in Abhängigkeit vom Stoßwinkel mit der Machzahl als Parameter. Zu beachten sind die folgenden Punkte.



1. Für jede Machzahl gib es einen maximalen Umlenkwinkel  $\vartheta_{\max}$ . In diesem Fall stellt sich z.B ein abgelöster vor einem Keil mit Halbwinkel  $\vartheta > \vartheta_{\max}$  ein.
  2. Für jede Machzahl gibt es zu einen Umlenkwinkel zwei Lösungen 1 und 2 für den Stoßwinkel. Man bezeichnet Stöße mit dem kleineren Stoßwinkel ( $\sigma_1 < \sigma_{\vartheta_{\max}}$ ) als schwach und die mit dem größeren Stoßwinkel ( $\sigma_2 > \sigma_{\vartheta_{\max}}$ ) als stark. Die Grenzkurve ist durch die Bedingung  $\vartheta = \vartheta_{\max}$  festgelegt.
  3. Die zwei Lösungen für  $\vartheta = 0$  sind die Machsche Welle mit  $\sin \sigma = \sin \mu = 1/Ma$  und der senkrechte Stoß mit  $\sigma = 90^\circ$ .
  4. Es existiert eine zusätzliche Grenzkurve für den Stoßwinkel, die den Überschallbereich und den Unterschallbereich hinter dem Stoß trennt.
- Die Anwendung der Stoßbeziehung auf das Strömungsfeld um einen spitzen und stumpfen Körper zeigen die folgenden beiden Bilder.



### 3.3.4 Die hypersonischen Näherungen für den schrägen Verdichtungsstoß

Wir benützen die Stoßgleichung (23)

$$\sin^2 \sigma = \frac{1}{Ma^2} + \frac{\kappa + 1}{2} \frac{\sin \sigma \sin \vartheta}{\cos(\sigma - \vartheta)}$$

Wir können diese Gleichung für die folgenden Grenzfälle nach  $\sin \sigma$  auflösen und erhalten für spitze Körper mit anliegendem Stoß die folgende Einteilung.

a. Hypersonisch schlanke Körper. ( $Ma \gg 1$ ,  $Ma \sin \vartheta < 1$  bzw.  $\sin \vartheta < 1/Ma$ )

Für  $Ma \gg 1$  und kleine Umlenkwinkel  $\vartheta$  liegt der Stoß nahe am Körper. Das heißt der Umlenkwinkel ist ebenfalls klein und wir können deshalb  $\cos(\sigma - \vartheta) = 1$  setzen.

Die obige Stoßgleichung reduziert sich zu einer quadratischen Gleichung und kann damit aufgelöst werden.. Wir erhalten:

$$\frac{\sin \sigma}{\sin \vartheta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\kappa + 1}{2} + \sqrt{\left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^2 + \left( \frac{2}{Ma_1^2 \sin^2 \vartheta} \right)^2} \right) \quad (25)$$

$$Ma_1 \sin \sigma = \frac{Ma_1 \sin \vartheta}{2} \left( \frac{\kappa + 1}{2} + \sqrt{\left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^2 + \left( \frac{2}{Ma_1^2 \sin^2 \vartheta} \right)^2} \right) = P_s(Ma_1 \sin \vartheta) \quad (26)$$

Die Zustandsänderungen über den schrägen Stoß sind eine Funktion von  $Ma_n$  und  $\kappa$ .  
 $p_2/p_1, T_2/T_1, \rho_2/\rho_1 = Fi(Ma_1 \sin(\sigma))$ .

Für den hypersonisch schlanken Fall gilt nach 25a  $Ma_1 \sin \sigma = P_s(Ma \sin \vartheta)$ . Hieraus folgt für die normierten Zustandsänderungen:

$$p_2/p_1, T_2/T_1, \rho_2/\rho_1 = Fi(Ma_1 \sin \vartheta)$$

Da  $Ma_1 \sin \vartheta < 1$  voraus gesetzt ist, müssen die vollen Stoßbeziehungen Gl.20-22 benutzt werden.

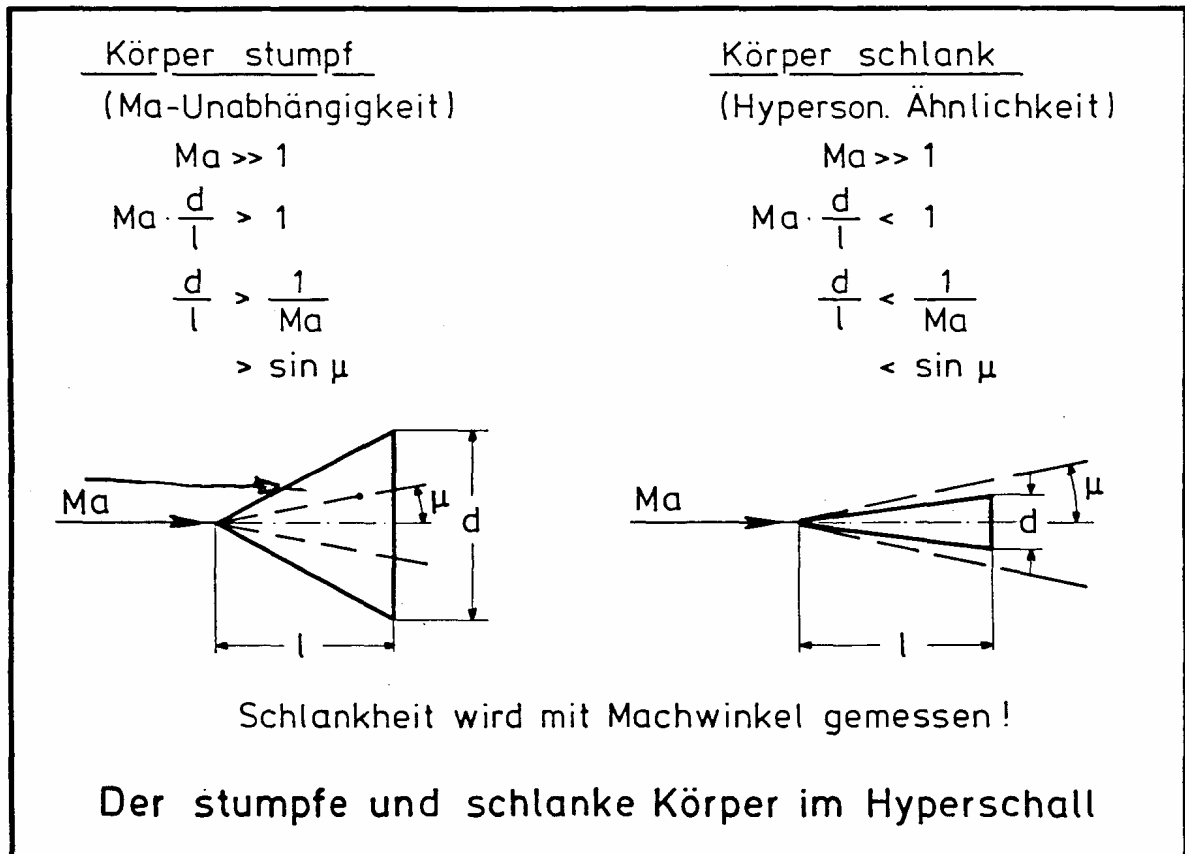
a. Hypersonisch ‚stumpfe‘ Körper. ( $Ma \gg 1$ ,  $Ma \sin \vartheta > 1$  bzw.  $\sin \vartheta > 1/Ma$ )

Wir vernachlässigen in der Stoßgleichung zusätzlich  $1/Ma^2$  gegen den 2 Summanden und erhalten dann:

$$\frac{\sin \sigma}{\sin \vartheta} = \frac{\kappa + 1}{2} \quad (26)$$

Dies heißt für  $Ma \gg 1$  und  $Ma \sin \vartheta > 1$  wird die Stoßwinkelbeziehung unabhängig von der Machzahl. Das gleiche Ergebnis folgt aus Gl.25 mit  $Ma_1 \sin \vartheta > 1$

Das folgende Bild erläutert die Übertragung der hypersonischen Stoßbeziehungen auf einen keilförmigen Körper. Der Sinus des Umlenkswinkels wird näherungsweise durch das Dicken /Längen Verhältnis  $d/L \approx \sin\vartheta$  ersetzt. Ein spitzer Körper ist hypersonisch stumpf, wenn seine geometrische Ausdehnung  $d/l$  den Machwinkelbereich  $\mu$  übersteigt, er ist hypersonisch schlank wenn  $d/l$  innerhalb des Machwinkels liegt.



Die Berechnungsformeln für Stoßwinkel Druck, Dichte und Temperatur sind im Folgenden für den hypersonisch schwachen und starken Stoß zusammengestellt:

**Hypersonisch schlank** : (  $Ma \gg 1$ ;  $Ma (d/L) < 1$  )

$$Ma_1 \sin \sigma = \frac{Ma_1 \sin \vartheta}{2} \left( \frac{\kappa + 1}{2} + \sqrt{\left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^2 + \left( \frac{2}{Ma_1^2 \sin^2 \vartheta} \right)^2} \right) = P_s (Ma_1 \sin \vartheta)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa Ma_{1n}^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1}; \quad Ma_{1n} = P_s (Ma_1 \sin \vartheta)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(2\kappa Ma_{1n}^2 - (\kappa - 1))((\kappa - 1)Ma_{1n}^2 + 2)}{(\kappa + 1)^2 Ma_{1n}^2}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa + 1)Ma_{1n}^2}{(\kappa - 1)Ma_{1n}^2 + 2}$$

**Hypersonisch ,stumpf** (  $Ma \gg 1$ ;  $Ma (d/L) > 1$  )

$$Ma_1 \sin \sigma = \frac{\kappa + 1}{2} Ma_1 \sin \vartheta$$

$$\text{bzw. } \sin \sigma = \frac{\kappa + 1}{2} \sin \vartheta$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 2 \frac{\kappa + 1}{\kappa} (Ma_1 \sin \vartheta)^2$$

$$\text{bzw. } \frac{p_2}{(\rho/2)V_1^2} = (\kappa + 1) \sin^2 \vartheta$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2(\kappa - 1)}{\kappa} (Ma_1 \sin \vartheta)^2$$

$$\text{bzw. } \frac{T_2}{(1/2)V_1^2} = \frac{(\kappa - 1)}{R} \sin^2 \vartheta$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa + 1)}{(\kappa - 1)}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa + 1)}{(\kappa - 1)}$$

Die Beiwerte normiert mit dynamischen Größen der Anströmung sind nicht mehr von der Machzahl abhängig.

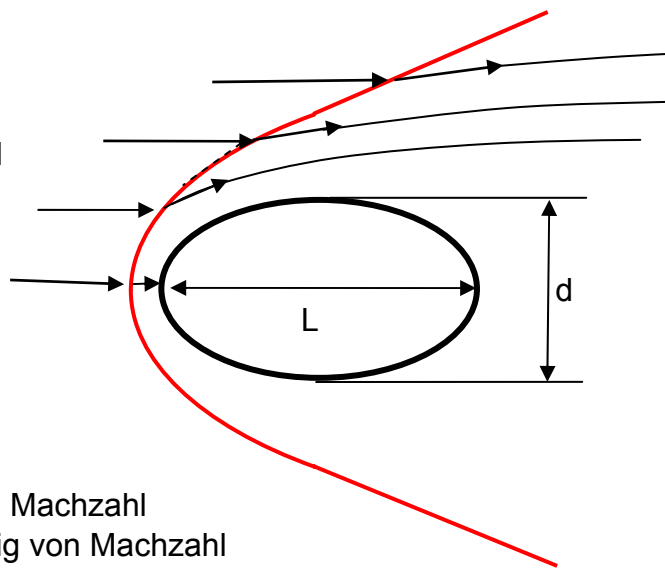
### 3.4 Das Prinzip der Machzahlunabhängigkeit

Die Zustandsänderungen über den senkrechten und schrägen Verdichtungsstoß werden für hohe Machzahlen  $Ma \gg 1$  unabhängig von der Machzahl sofern Druck und Temperatur mit den dynamischen Größen vor dem Stoß normiert werden. Außerdem ist der Stoßwinkel  $\sigma$  nur mehr eine Funktion des Umlenkungswinkels  $\vartheta$ .

Dieses Unabhängigkeitsprinzip gilt für stumpfe Körper allgemein und die wesentlichsten Eigenschaften sind im folgenden Bild zusammengestellt.

#### Vorraussetzungen

- Anströmmachzahl  $Ma \gg 1$
- Körper hypersonisch stumpf  $Ma \cdot d/L > 1$



#### Wichtigste Ergebnisse

- Stoßform unabhängig von Machzahl
- Stromlinienfeld unabhängig von Machzahl
- Normierte Beiwerte lokale Beiwerte  $c_p$  unabhängig
- Normierte integrale Beiwerte  $C_W$ ,  $C_A$  unabhängig von Machzahl

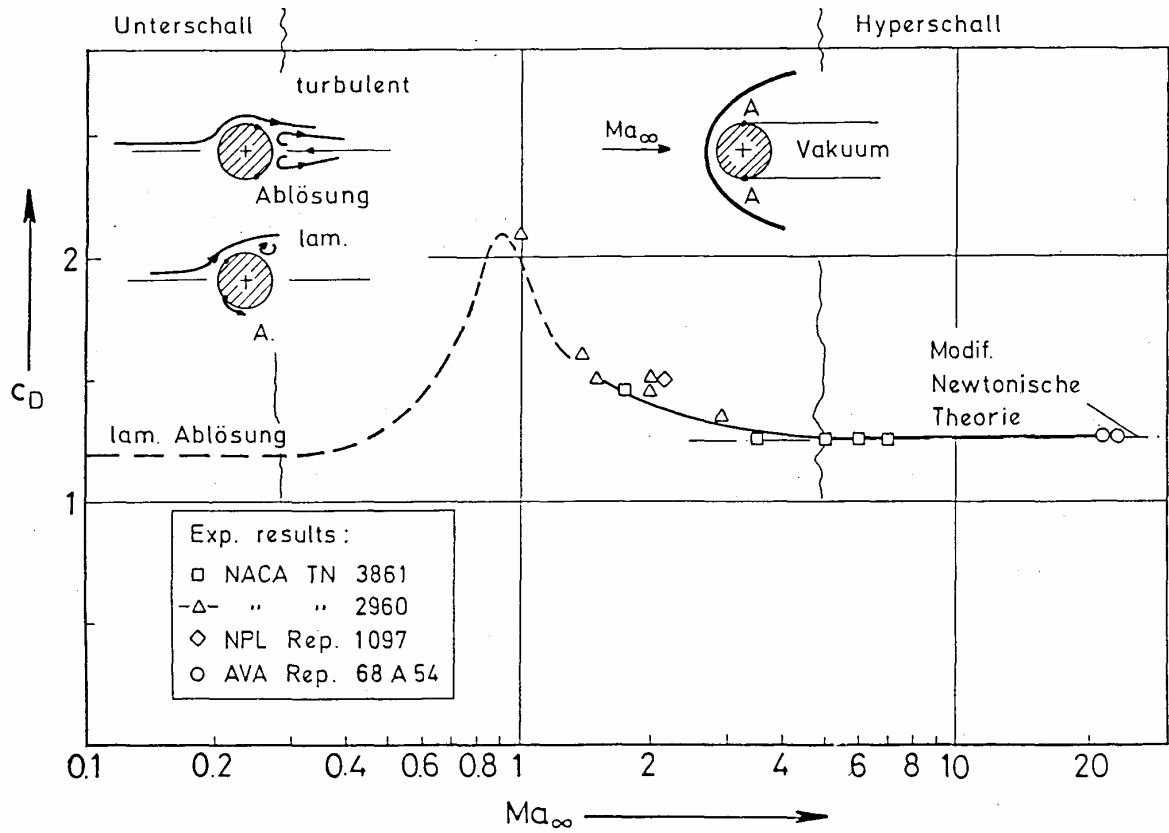
#### Prinzip der Machzahlunabhängigkeit der Strömung um stumpfe Körper

Die folgenden beiden Bilder demonstrieren die Machzahlunabhängigkeit anhand von Windkanalmessungen

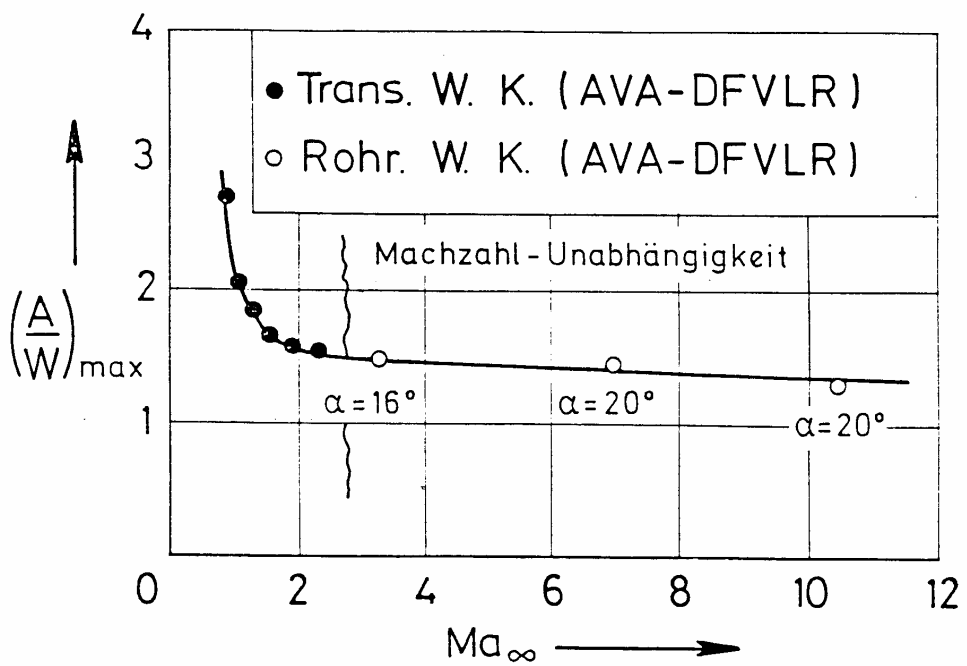
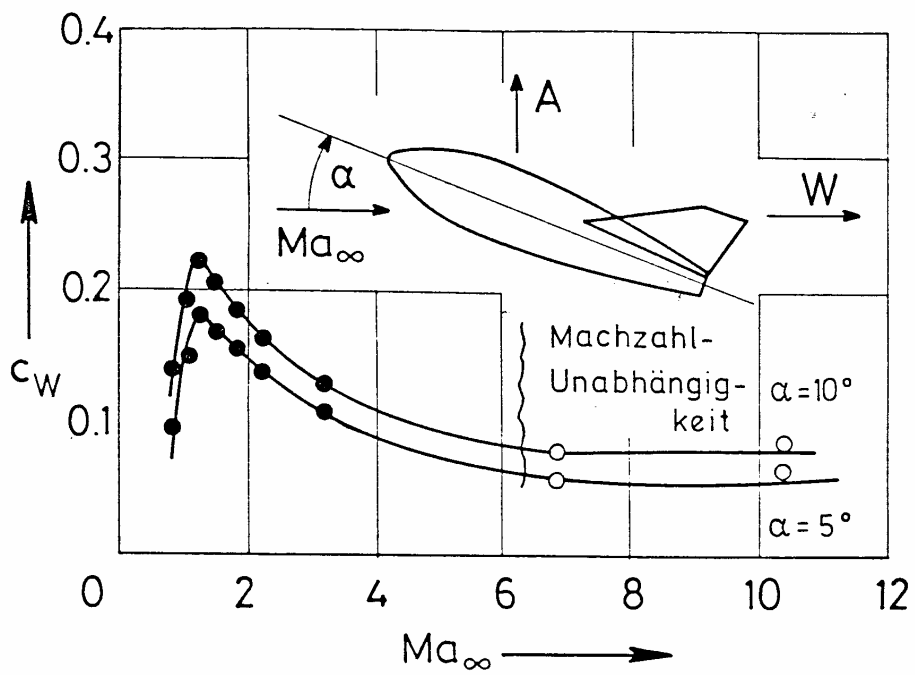
Das erste Bild zeigt den Widerstandsbeiwert des quer angeströmten Kreiszylinders in Abhängigkeit von der Machzahl. Man ersieht, dass die Machzahlunabhängigkeit sowohl im niedrigen Unterschall als auch im Hyperschall existiert. Im Transsonikbereich bei  $Ma = 1$  erfährt der Zylinder ein ausgeprägtes Widerstandsmaximum.

Das zweite Bild zeigt den Widerstandsbeiwert  $c_W$  und das Auftriebs/Widerstand Verhältnis  $A/W$  eines Integralkörpers in Abhängigkeit von der Machzahl. Die Messdaten stammen aus dem Göttinger Transsonik- und Rohrwindkanal. Man erkennt, dass

bereits ab einer Machzahl von  $Ma = 6$  die aerodynamischen Beiwerte konstante Machzahl unabhängige Werte annehmen.



Machzahlunabhängigkeit im Unter- und Hyperschall



Aerodyn. Beiwerte des MBB Lifting Body  
in Abhängigkeit von der Machzahl



### 1. Einführung von dimensionslosen Variablen.

Langen:  $x' = x/l$ ;  $y' = y/l$

Geschwindigkeiten:  $u' = u/V_1$   $v' = v/V_1$ ;  $Ma = V_1/a_1$

Beiwerte:  $p' = \frac{p}{\rho V^2}$ ;  $\rho' = \rho/\rho_1$

### 2. Eulergleichungen für Strömung zwischen Stoß und Körper

Kontinuität:  $\frac{\partial(\rho' u')}{\partial x'} + \frac{\partial(\rho' v')}{\partial y'}$  Machzahl nicht als

Impuls  $u' \frac{\partial(u')}{\partial x'} + v' \frac{\partial(u')}{\partial x'} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} = 0$  Variable enthalten

$$u' \frac{\partial(v')}{\partial y'} + v' \frac{\partial(v')}{\partial y'} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial y'} = 0$$

Entropie  $u' \frac{\partial(p'/\rho'^{\kappa})}{\partial x'} + v' \frac{\partial(p'/\rho'^{\kappa})}{\partial y'} = 0$

### 3 Stoßbeziehungen

Allgemeine Lösung, Ma abhängig

Grenzwerte Ma  $\gg 1$ ;  
unabhängig von Ma

$$\sin^2 \sigma = \frac{1}{Ma^2} + \frac{\kappa + 1}{2} \frac{\sin \sigma \sin \vartheta}{\cos(\sigma - \vartheta)}$$

$$\sin \sigma = \frac{\kappa + 1}{2} \sin \vartheta$$

$$p'_2 = \frac{2}{\kappa + 1} \sin^2 \sigma \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{1}{Ma^2 \sin^2 \sigma} \right)$$

$$p'_2 = \frac{2}{\kappa + 1} \sin^2 \sigma$$

$$\rho'_2 = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \left( 1 + \frac{2}{\kappa - 1} \frac{1}{Ma^2 \sin^2 \sigma} \right)^{-1}$$

$$\rho'_2 = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}$$

$$u'_2 = 1 - \frac{2}{\kappa + 1} \left( \sin^2 \sigma - \frac{1}{Ma^2} \right)$$

$$u'_2 = 1 - \frac{2}{\kappa + 1} \sin^2 \sigma$$

### 4. Folgerungen

In den dimensionslosen Eulergleichungen für das Strömungsfeld hinter dem Stoß bis zum Körper ist die Machzahl nicht als Variable enthalten.

Die Machzahl ist nur in den Stoßbeziehungen enthalten. Für Ma  $\gg 1$  entfällt auch aus diesen Beziehungen die Machzahl. Damit ist im gesamten Gleichungssystem die Machzahl nicht mehr enthalten und die Strömung wird unabhängig von der Machzahl.